Písemná zkouška z Matematiky III pro IES FSV UK (E)
ZS 2005-2006

Příklad 1 : Najděte primitivní funkci (včetně určení intervalů existence)

$$\int \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x} \cdot \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x. \qquad \text{(16 bodů)}$$

Příklad 2 : Nechť B je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & -25 & 0 \\ 10 & -40 & 100 & -12 \\ -25 & 100 & -250 & 30 \\ 0 & -12 & 30 & -200 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. (11 bodů)

Příklad 3 : Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 16 & 17 & 26 \\ -9 & -9 & -14 \end{pmatrix} \qquad \text{(11 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+3x)^{(x^2)} - (1+x^2)^{3x}}{(1-\cos x)^2} \qquad \text{(11 bodů)}$$

Příklad 5 : Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

$$f(x,y) = e^{x+y}(x^2 - x + y^2 - y), \quad M = \mathbf{R}^2. \qquad \text{(11 bodů)}$$

Výsledky písemky z Matematiky III pro IES FSV UK (E)
ZS 2005-2006

Příklad 1: $-\log|\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2}\log|\operatorname{tg} x - 1| + \frac{1}{2}\log|\operatorname{tg} x + 1|$ na každém z intervalů $(k\frac{\pi}{4}, (k+1)\frac{\pi}{4})$, $k \in \mathbf{Z}$. Substitucí $y = \operatorname{tg} x$ lze převést na racionální funkci. Lze použít i substituci $y = \operatorname{cotg} x$.
Příklad 2: NSD, nikoli ND; -87.
Příklad 3: Vlastní číslo 1 násobnosti 2, vlastní vektory $t \cdot [1,-1,0]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; vlastní číslo 4 násobnosti 1, vlastní vektory $t \cdot [0,-2,1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$
Příklad 4: -18
Příklad 5: Ostré lokální minimum v bodě $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. (Sedlový bod $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$.)