Písemná zkouška z Matematiky III pro IES FSV UK (D)
ZS 2005-2006

Příklad 1 : Najděte primitivní funkci (včetně určení intervalů existence)

$$\int \frac{\cos x - 1}{\sin x - 1}\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(16 bodů)}$$

Příklad 2 : Nechť B je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 8 & 0 & 16 \\ 16 & 0 & 8 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 8 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $B\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$. (11 bodů)

Příklad 3 : Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{(11 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^x + (1-3x)^x - 2}{e^{(x^3)} - 1} \qquad \text{(11 bodů)}$$

Příklad 5 : Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

$$f(x,y) = 2\log(x+y^2) - 5\,\mathrm{arctg}\,x, \quad M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : x > -y^2\}. \qquad \text{(11 bodů)}$$

– –

Výsledky písemky z Matematiky III pro IES FSV UK (D)
ZS 2005-2006

Příklad 1: Pro převod na racionální funkci lze využít substituci $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ nebo $y = \mathrm{cotg}\,\frac{x}{2}$. Žádná z nich ovšem nefunguje na maximálních intervalech existence primitivní funkce, což jsou $(-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{1}{2}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Při použití substituce $y = \mathrm{cotg}\,\frac{x}{2}$ vyjde primitivní funkce $-\log(1 + \mathrm{cotg}^2\,\frac{x}{2}) + 2\log|\,\mathrm{cotg}\,\frac{x}{2} - 1| + \frac{2}{\mathrm{cotg}\,\frac{x}{2} - 1}$ na každém z intervalů $(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ a $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k+2)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Při použití $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ vyjde primitivní funkce $\log(1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}) - 2\log|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 1| - \frac{2}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 1}$ na každém z intervalů $(-\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ a $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Pro zjištění primitivní funkce na maximálních intervalech by bylo třeba „nalepování“ v prvním případě v bodech $2k\pi$, v druhém případě $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. To je v tomto případě snadné, jelikož uvedené primitivní funkce mají v příslušných bodech limitu 0 (zleva i zprava), stačí tedy dodefinovat nulou.
Příklad 2: ID; 72.
Příklad 3: Vlastní číslo 1 násobnosti 2, vlastní vektory $t \cdot [1,1,2]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; vlastní číslo 2 násobnosti 1, vlastní vektory $t \cdot [1,1,\frac{5}{3}]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$
Příklad 4: -9
Příklad 5: Ostré lokální minimum v bodě $[2,0]$. (Sedlový bod $[\frac{1}{2}, 0]$.)