

**Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (G)**  
**ZS 2004-2005**

---

**Příklad 1 :** Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 25 + \frac{1}{n} \right)^6 - \left( 5 + \frac{1}{n} \right)^{12} \right) \cdot \sqrt[6]{(n+2)^7 - (n-1)^7} \quad (15 \text{ bodů})$$

**Příklad 2 :** Spočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{(2^{x+1}-2)} - 1}{\sqrt{1 - \cos x}} \quad (15 \text{ bodů})$$

**Příklad 3 :** Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \min\{x, \sqrt[3]{x}, x^2\}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(10 bodů)

**Příklad 4 :** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{4}{x} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x. \quad (20 \text{ bodů})$$

**Příklad 5 :** (Alespoň dvě úlohy je třeba vyřešit bezchybně)

- (a) Najděte všechna reálná řešení rovnice  $(\log_{10} x)^2 = \log_{10}(100x)$ .
- (b) Najděte všechna reálná řešení nerovnice  $||x + 2| - 2| > 1$ .
- (c) Načrtněte graf funkce  $f(x) = (x - 2)^3 + 8$ .

---

**Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (G)**  
**ZS 2004-2005**

---

**Příklad 1:**  $-54 \cdot 5^{10} \cdot \sqrt[6]{21}$

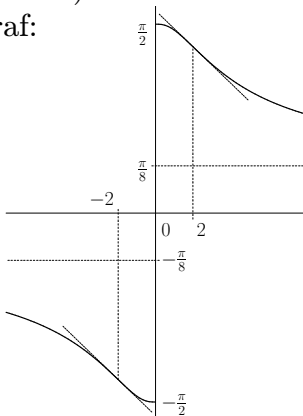
**Příklad 2:** Neexistuje (zleva  $-2\sqrt{2} \log 2 \log 3$ , zprava  $2\sqrt{2} \log 2 \log 3$ )

**Příklad 3:**  $D_f = \mathbf{R}$ ,  $f$  je spojitá na  $\mathbf{R}$ .  $f'(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, 1), \\ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty), \\ 2x & x \in (0, 1). \end{cases}$

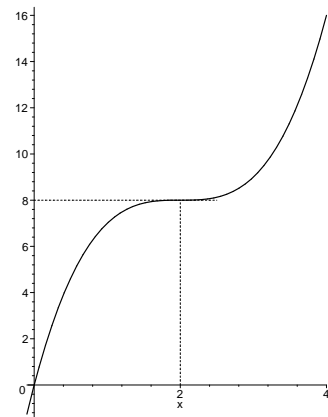
$f'_-(-1) = 1$ ,  $f'_+(-1) = \frac{1}{3}$ ,  $f'_-(0) = +\infty$ ,  $f'_+(0) = 0$ ,  $f'_-(1) = 2$ ,  $f'_+(1) = \frac{1}{3}$ .

**Příklad 4:**  $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ,  $f$  je spojitá v každém bodě  $D_f$ ,  $f$  je lichá, stačí vyšetřit na  $(0, +\infty)$ . Limita v 0 zprava je  $\frac{\pi}{2}$ , limita v  $+\infty$  je  $\frac{\pi}{8}$ .  $f$  je klesající na  $(0, +\infty)$  (i na  $(-\infty, 0)$ ),  $H_f = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8}) \cup (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2})$ .  $f$  je konkávní na  $(0, 2)$ , konvexní na  $(2, +\infty)$ , v bodě 2 je inflexní bod. Asymptota v  $+\infty$  je  $x \mapsto \frac{\pi}{8}$ . (Chování na  $(-\infty, 0)$  lze odvodit z lichosti.)

Graf:



5(c):



**Příklad 5:** (a) 100,  $\frac{1}{10}$  (b)  $(-\infty, -5) \cup (-3, -1) \cup (1, +\infty)$