IV.2 Další vlastnosti limit funkcí

Věta 4 (aritmetika limit). *Nechť $c \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$. Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = A+B$, *pokud je výraz $A+B$ definován,*
(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz AB definován,*
(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz A/B definován.*

Důsledek. *Nechť reálné funkce f a g jsou spojité v bodě $a \in \mathbf{R}$. Pak také funkce $f+g$, fg jsou spojité v bodě a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak také f/g je spojitá v bodě a.*

Věta 5 (o srovnání). *Nechť $c \in \mathbf{R}^*$ a dále $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$.*

(i) *Jestliže $A > B$, pak existuje prstencové okolí $P(c,\delta)$ takové, že pro každé $x \in P(c,\delta)$ platí $f(x) > g(x)$.*
(ii) *Jestliže existuje prstencové okolí $P(c,\delta)$ takové, že pro každé $x \in P(c,\delta)$ platí $f(x) \leq g(x)$, pak platí $A \leq B$.*

Věta 6 (o policajtech). *Nechť $a \in \mathbf{R}^*$.*

(i) *Nechť f, g, h jsou funkce, pro které platí:*
- *Existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ takové, že pro $x \in P(a,\delta)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.*
- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.

Potom existuje rovněž $\lim_{x\to a} h(x)$ a rovná se $\lim_{x\to a} f(x)$.

(ii) *Nechť f a g jsou funkce, pro které platí:*
- *Existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ takové, že pro $x \in P(a,\delta)$ platí $f(x) \leq g(x)$.*
- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Potom také $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.

(iii) *Nechť f a g jsou funkce, pro které platí:*
- *Existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ takové, že pro $x \in P(a,\delta)$ platí $f(x) \geq g(x)$.*
- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Potom také $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$.

Věta 7 (doplňky k aritmetice limit). *Nechť f a g jsou funkce a $c \in \mathbf{R}^*$.*

(a) *Je-li $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ a funkce g je omezená na $P(c,\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$, pak $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.*
(b) *Je-li $\lim_{x\to c} f(x) > 0$, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ a funkce g je kladná na $P(c,\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$, pak $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = +\infty$.*

Věta 8 (o limitě složené funkce). *Nechť funkce f a g splňují:*

(i) $\lim_{x \to c} g(x) = A$,
(ii) $\lim_{y \to A} f(y) = B$.

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(P1) *f je spojitá v A,*
(P2) $\exists \eta > 0 \, \forall x \in \mathcal{P}(c, \eta) : \; g(x) \neq A$,

pak $\lim_{x \to c} f(g(x)) = B$.

Důsledek (spojitost složené funkce). *Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbf{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(a)$. Pak funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a.*

Poznámka. Zřejmé analogie Vět 2 až 7 platí pro limity zleva a zprava. Podobně analogie důsledků Věty 3 a Věty 4 platí i pro spojitost zleva a zprava. Své analogie pro jednostranné limity má i Věta 8. Jedna z variant Věty 8 pro jednostranné limity je tato:

Nechť funkce f a g splňují:

(i) $\lim_{x \to c} g(x) = A$,
(ii) $\lim_{y \to A+} f(y) = B$.

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(P1) *f je spojitá v bodě A zprava a navíc* $\exists \eta > 0 \, \forall x \in \mathcal{P}(c, \eta) : \; g(x) \geq A$,
(P2) $\exists \eta > 0 \, \forall x \in \mathcal{P}(c, \eta) : \; g(x) > A$,

pak $\lim_{x \to c} f(g(x)) = B$.

Věta 9 (o limitě monotonní funkce). *Budiž funkce f monotonní na (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$. Potom existují* $\lim_{x \to a+} f(x)$ *a* $\lim_{x \to b-} f(x)$.

Věta 10 (Heine). *Nechť $c, A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim_{x \to c} f(x) = A$. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel splňujících $x_n \neq c$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ a $\lim x_n = c$. Pak* $\lim f(x_n) = A$.

Poznámky.

(1) Analogická tvrzení platí pro limitu zleva a limitu zprava. (Pro limitu zprava se předpoklad $x_n \neq c$ nahradí předpokladem $x_n > c$.)

(2) Platí i obrácení Věty 10: Jestliže f je definována na $P(c, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$ a pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků D_f různých od c splňující $\lim x_n = c$ platí $\lim f(x_n) = A$, pak $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

Možná srozumitelnější je obměna: Je-li f definována na $P(c, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$ a přitom A není limitou funkce f v bodě c, pak existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků D_f různých od c, pro kterou platí $\lim x_n = c$, ale A není limitou posloupnosti $\{f(x_n)\}$.
Podobně pro jednostranné limity.