

IV.7 Derivace funkce – aplikace

Definice. Nechť f je funkce a $a \in \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a

- **lokální maximum**, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(a, \delta)$ je $f(x) \leq f(a)$;
- **lokální minimum**, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(a, \delta)$ je $f(x) \geq f(a)$;
- **lokální extrém**, má-li v bodě a lokální maximum nebo lokální minimum.

Poznámka. Má-li f v bodě a lokální extrém, je definovaná alespoň na nějakém okolí bodu a .

Věta 31 (nutná podmínka lokálního extrému). Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Existuje-li $f'(a)$, pak je $f'(a) = 0$.

Věta 32 (Rolleova). Nechť $a < b$ a funkce f má následující vlastnosti:

- (i) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,
- (ii) má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) ,
- (iii) $f(a) = f(b)$.

Potom existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí $f'(\xi) = 0$.

Věta 33 (Lagrangeova). Nechť $a < b$ a funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) . Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takový, že platí

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 34 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce na intervalu).
Nechť J je interval, funkce f je spojitá na J a má derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém vnitřním bodě intervalu J .

- (i) Funkce f je neklesající na intervalu J , právě když pro každý vnitřní bod x intervalu J platí $f'(x) \geq 0$.
- (ii) Je-li $f'(x) > 0$ pro každý vnitřní bod x intervalu J , je funkce f na intervalu J rostoucí.

Analogicky pro funkce nerostoucí či klesající.

Důsledek. Je-li $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f na intervalu (a, b) konstantní.

Poznámka. V bodě (ii) obrácená implikace neplatí.

Věta 35 (výpočet jednostranné derivace). Nechť funkce f je spojitá zprava v bodě a a nechť existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x).$$

Analogicky pro derivaci zleva a oboustrannou derivaci.

Věta 36 (l'Hospitalovo pravidlo). Nechť funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbf{R}^*$ vlastní derivace a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje. Nechť platí jedna z následujících podmínek

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$.

Potom existuje i $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Analogické tvrzení platí pro limity zleva a zprava.