IV.6 Elementární funkce
goniometrické a cyklometrické funkce

Definice. Nechť f je funkce. Řekneme, že f je

(a) **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$;
(b) **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$;
(c) **periodická s periodou** $P > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + P \in D_f$, $x - P \in D_f$ a $f(x+P) = f(x-P) = f(x)$.

Věta 27 (zavedení funkce sinus a čísla π). *Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce* **sinus** *(budeme ji značit* sin*), které mají následující vlastnosti:*

(S1) $D_{\sin} = \mathbf{R}$,
(S2) sin *je rostoucí na* $\langle -\pi/2,\ \pi/2 \rangle$,
(S3) $\sin 0 = 0$,
(S4) $\forall x, y \in \mathbf{R}:\ \sin(x+y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y$,
(S5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Věta 28 (další vlastnosti sinu). *Dále platí:*

(S6) $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin(-\pi/2) = -1$,
(S7) $\forall x \in \mathbf{R}: \sin^2 x + \sin^2(\pi/2 - x) = 1$,
(S8) $\forall x \in \mathbf{R}: |\sin x| \le 1$,
(S9) *funkce* $x \mapsto \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ *je sudá,*
(S10) $\forall x \in \mathbf{R}:\ \sin(x + \pi) = -\sin x$,
(S11) *funkce* sin *je lichá,*
(S12) *funkce* sin *je periodická s periodou* 2π,
(S13) *funkce* sin *je spojitá na* $\mathbf{R}$,
(S14) $\forall x \in \mathbf{R}:\ \sin' x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

Definice. Dále definujeme:

- funkci **kosinus** (značíme cos) předpisem $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$;
- funkci **tangens** (značíme tg) předpisem $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$;
- funkci **kotangens** (značíme cotg) předpisem $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Větička 29.

(i) $D_{\cos} = \mathbf{R}$, *funkce* cos *je spojitá na* $\mathbf{R}$, *je sudá a periodická s periodou* 2π, *na intervalu* $\langle 0, \pi\rangle$ *je klesající,* $\cos' x = -\sin x$ *pro* $x \in \mathbf{R}$.

(ii) $D_{\mathrm{tg}} = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, *funkce* tg *je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, je lichá a periodická s periodou* π, *na intervalu* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *je rostoucí, v bodě* $-\frac{\pi}{2}$ *zprava má limitu* $-\infty$, *v bodě* $\frac{\pi}{2}$ *zleva limitu* $+\infty$, $\mathrm{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$ *pro* $x \in D_{\mathrm{tg}}$;

(iii) $D_{\mathrm{cotg}} = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}(k\pi, (k+1)\pi)$, *funkce* cotg *je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, je lichá a periodická s periodou* π, *na intervalu* $(0, \pi)$ *je klesající, v bodě* 0 *zprava má limitu* $+\infty$, *v bodě* π *zleva limitu* $-\infty$, $\mathrm{cotg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$ *pro* $x \in D_{\mathrm{cotg}}$.

Definice.

(1) Funkcí **arkussinus** (značíme arcsin) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin_{|\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$.

(2) Funkcí **arkuskosinus** (značíme arccos) rozumíme funkci inverzní k funkci $\cos_{|\langle 0, \pi\rangle}$.

(3) Funkcí **arkustangens** (značíme arctg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\mathrm{tg}_{|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$.

(4) Funkcí **arkuskotangens** (značíme arccotg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\mathrm{cotg}_{|(0,\pi)}$.

Větička 30.

(1) $D_{\arcsin} = D_{\arccos} = \langle -1, 1\rangle$, $D_{\mathrm{arctg}} = D_{\mathrm{arccotg}} = \mathbf{R}$. *Funkce* arcsin *a* arctg *jsou liché.*

(2) *Funkce* arcsin *a* arctg *jsou rostoucí, funkce* arccos *a* arccotg *klesající (na svých definičních oborech).*

(3) *Funkce* arcsin, arccos, arctg *a* arccotg *jsou spojité na svých definičních oborech.*

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x} = 1.$

(5) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \langle -1, 1\rangle$;
$\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arccotg}\, x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{arctg}\, x = -\frac{\pi}{2}$;

(7) $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *a* $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *pro* $x \in (-1, 1)$,
$\mathrm{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$ *a* $\mathrm{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$ *pro* $x \in \mathbf{R}$.