

IV.1 Konformní zobrazení a konformní ekvivalence

Definice.

- Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ označme $A(z) = \frac{z}{|z|}$.
- Nechť $f : U(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Řekneme, že zobrazení f **zachovává úhly** v bodě a , pokud pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita

$$v(t) = \lim_{r \rightarrow 0+} A(f(a + re^{it}) - f(a))$$

a pro každá $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{v(t_1)}{v(t_2)} = \frac{e^{it_1}}{e^{it_2}}.$$

Poznámka. Zobrazení f zachovává úhly v bodě a , právě když pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita

$$\lim_{r \rightarrow 0+} A(f(a + re^{it}) - f(a))e^{-it},$$

a její hodnota nezávisí na t .

Větička 1. Nechť f je komplexní funkce definovaná na $U(a, R)$.

- (i) Jestliže $f'(a)$ existuje a je různá od 0, pak f zachovává úhly v bodě a .
- (ii) Jestliže f zachovává úhly v bodě a a funkce $\tilde{f}(x, y) = (\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy))$ má v bodě $(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)$ nenulový totální diferenciál, pak existuje $f'(a)$ (a je různá od 0).
- (iii) Je-li f holomorfní v bodě a a $f'(a) = 0$, pak f nezachovává úhly v bodě a .

Definice. Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je otevřená. Řekneme, že zobrazení $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ je **konformní** na G , je-li meromorfní a prosté.

Poznámky.

- (1) Je-li f konformní na G , $a \in G \cap \mathbb{C}$ a $f(a) \in \mathbb{C}$, pak $f'(a) \neq 0$.
- (2) Je-li f konformní na G , pak má nejvýše jeden pól, a ten je násobnosti 1.
- (3) Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, $f \in H(G)$ splňující $f'(z) \neq 0$ pro všechna $z \in G$, pak f je na G lokálně konformní, tj. konformní v nějakém okolí každého bodu.

(4) Je-li f konformní na G , pak zachovává úhly v každém bodě G :
 Je-li $a \in \mathbb{C}$ a $f(a) \in \mathbb{C}$, pak je zachovávání úhlů definováno výše.
 V ostatních případech je definice analogická, s tím že:

- (a) je-li $a \in \mathbb{C}$ a $f(a) = \infty$, pak $v(t) = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{A(f(a+re^{it}))}$;
- (b) je-li $a = \infty$ a $f(a) \in \mathbb{C}$, pak $v(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} A(f(re^{-it}) - f(\infty))$;
- (c) je-li $a = \infty$ a $f(a) = \infty$, pak $v(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{A(f(re^{-it}))}$.

Větička 2. f je konformní na $\overline{\mathbb{C}}$, právě když na $\overline{\mathbb{C}}$ platí $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$,
 kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ splňují $ad - bc \neq 0$.

Větička 3. Je-li f konformní na $\mathbb{C}$, pak lze konformně rozšířit na $\overline{\mathbb{C}}$,
 a má tedy tvar z Větičky 2.

Důsledek. Je-li $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ konformní, pak $f(z) = az + b$ pro nějaká
 $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Věta 4 (Riemannova). Necht' $G \subsetneq \mathbb{C}$ je oblast, pro kterou $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ je
 souvislá. Pak existuje konformní zobrazení G na $U(0, 1)$.

Definice. Oblasti $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ se nazývají **konformně ekvivalentní**, jestliže
 existuje konformní zobrazení G_1 na G_2 .

Poznámka. Z Věty 4 plyne, že každé dvě oblasti $G_1, G_2 \subsetneq \mathbb{C}$ se sou-
 vislým doplňkem v $\overline{\mathbb{C}}$ (ekvivalentě, jednoduše souvislé) jsou konformně
 ekvivalentní.

Věta 5. Mezikruží $P(a_1, r_1, R_1)$ a $P(a_2, r_2, R_2)$ (kde $a_j \in \mathbb{C}$, $0 <$
 $r_j < R_j < +\infty$ pro $j = 1, 2$) jsou konformně ekvivalentní, právě když
 $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$.