V.1 Primitivní funkce – úvod

Definice. Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k f na** I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 1. *Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbf{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.*

Poznámka. Množinu všech primitivních funkcí k f na I značíme symbolem $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Skutečnost, že F je primitivní funkcí k f na I zapisujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \boldsymbol{C}, \quad x \in I.$$

Symbolem $\boldsymbol{C}$ označujeme množinu všech konstantních funkcí na $\mathbf{R}$. Pak součtem $F + \boldsymbol{C}$ myslíme množinu $\{F + h;\ h \in \boldsymbol{C}\}$. Výše uvedený zápis lze potom chápat jako rovnost množin. Podobně součtem $\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$ rozumíme množinu $\{F + G;\ F \in \int f(x)\,\mathrm{d}x, G \in \int g(x)\,\mathrm{d}x\}$

Větička 2. *Platí:*

(1) $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \boldsymbol{C}$ *na* $\mathbf{R}$ *(pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$);*

(2) $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \boldsymbol{C}$ *na* $(0, +\infty)$ *(pro $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, pro $\alpha \in \mathbf{Z}$, $\alpha < -1$ také na $(-\infty, 0)$);*

(3) $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log x + \boldsymbol{C}$ *na* $(0, +\infty)$, $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log(-x) + \boldsymbol{C}$ *na* $(-\infty, 0)$*;*

(4) $\int \exp x\,\mathrm{d}x = \exp x + \boldsymbol{C}$ *na* $\mathbf{R}$*;*

(5) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \boldsymbol{C}$ *na* $\mathbf{R}$, $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + \boldsymbol{C}$ *na* $\mathbf{R}$*;*

(6) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + \boldsymbol{C}$ *na každém z intervalů* $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$*;*

(7) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + \boldsymbol{C}$ *na každém z intervalů* $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$*;*

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + \boldsymbol{C}$ *na* $(-1, 1)$*;*

(9) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + \boldsymbol{C}$ *na* $\mathbf{R}$.

Větička 3. *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a α, $\beta \in \mathbf{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.*

Poznámka. Tvrzení předchozí větičky často zapisujeme

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

To je správný zápis, pokud alespoň jedno z čísel α,β je různé od nuly. Nicméně případ $\alpha = \beta = 0$ je nezajímavý.

Věta 4. *Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.*

Poznámka. Pomocí Věty 4 lze dokázat Větu III.19 o zavedení logaritmu.

Věta 5 (o substituci). *(i) Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Nechť φ je funkce definovaná na (α,β) s hodnotami v intervalu (a,b), která má v každém bodě $t \in (\alpha,\beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + \boldsymbol{C} \text{ na } (\alpha,\beta).$$

(ii) Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α,β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a,b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + \boldsymbol{C} \text{ na } (\alpha,\beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) + \boldsymbol{C} \text{ na } (a,b).$$

Poznámka. Bod (ii) předchozí věty platí i za poněkud jiných předpokladů: Nechť funkce f má primitivní funkci na (a,b) (což je splněno například, je-li f spojitá na (a,b)), funkce φ má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (α,β), je prostá na (α,β) a zobrazuje tento interval na interval (a,b). Pak, platí-li první rovnost, platí i druhá.

Věta 6 (integrace per partes). *Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Poznámka. Předchozí věta platí i bez předpokladu spojitosti, rozumíme-li rovností rovnost množin. Přesněji: Má-li funkce Gf primitivní funkci na I (a tedy množina popsaná na pravé straně je neprázdná), pak i funkce gF má primitivní funkci (a tedy množina na levé straně je neprázdná) a platí uvedená rovnost. Pokud množina napravo je prázdná (tj. pokud funkce Gf nemá primitivní funkci), je i množina nalevo prázdná (tj. ani funkce gF nemá primitivní funkci.