ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY

ZS 2017/2018

ZÁPOČTOVÉ ÚLOHY – SADA 1

Obecné poznámky:

- Výpočty i všechna tvrzení je třeba přiměřeně a srozumitelně zdůvodnit. K tomu je možné používat znalosti z Kapitol I a II z přednášky, jakož i znalosti ze základních kurzů matematické analýzy.
- Příklady jsou tří typů (viz níže).
- Základním nástrojem pro řešení úloh prvních dvou typů je Věta I.3 z přednášky. Může se také hodit věta o záměnnosti parciálních derivací známá ze základního kurzu analýzy.
- Při řešení úloh třetího typu se hodí definice a tvrzení z oddílu II.3 z přednášky doplněné geometrickou představou.
- Příklady je třeba rezervovat e-mailem. Rezervace bude potvrzena uvedením jména u příkladu. Bude-li příklad již obsazen, upozorním na to v e-mailové odpovědi. V e-mailu je možné napsat více příkladů v preferovaném pořadí. Rezervován bude první z dosud volných.
- Pokud se někomu zdá jeho úkol neřešitelný nebo má dojem, že v zadání je chyba, ať se ozve, já to pak prověřím.
- Řešení je třeba odevzdat rukou psané, nikoli tištěné.
- Doporučený termín odevzdání: 27.10.2017

První typ příkladů: V následujících příkladech jsou zadány reálné funkce f, g na otevřených množinách $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$. Úkolem je rozhodnout, které z těchto funkcí jsou reálnou částí nějaké holomorfní funkce na příslušné množině. V případě, že tomu tak je, je třeba příslušnou holomorfní funkci najít. V případě, že neexistuje, je třeba tuto skutečnost zdůvodnit.

Úloha č. 1 [rezervoval(a): *Matěj Michálek*]

- $f(x+iy) = x^2 + y^2$, $\Omega_1 = \mathbb{C}$.
- $g(x+iy) = x^2 - y^2$, $\Omega_2 = \mathbb{C}$.

Úloha č. 2 [rezervoval(a): *Lenka Hýlová*]

- $f(x+iy) = x^3 - 3xy^2$, $\Omega_1 = \mathbb{C}$.
- $g(x+iy) = x^3 - y^3$, $\Omega_2 = \mathbb{C}$.

Úloha č. 3 [rezervoval(a): *Nikola Piskačová*]

- $f(x+iy) = x^3y - xy^3$, $\Omega_1 = \mathbb{C}$.
- $g(x+iy) = x^3y + xy^3$, $\Omega_2 = \mathbb{C}$.

Úloha č. 4 [rezervoval(a): *Jan Vomlel*]

- $f(x+iy) = \frac{x}{y}$, $\Omega_1 = \{x+iy \in \mathbb{C}; y > 0\}$.
- $g(x+iy) = xy$, $\Omega_2 = \mathbb{C}$.

Úloha č. 5 [rezervoval(a): *Kristýna Šmídová*]

- $f(x+iy) = \cos x \cdot \cos y$, $\Omega_1 = \mathbb{C}$.
- $g(x+iy) = \cos x \cdot \cosh y$, $\Omega_2 = \mathbb{C}$.

Úloha č. 6 [rezervoval(a): *Matěj Kovář*]

- $f(x+iy) = \sin x \cdot \cos y$, $\Omega_1 = \mathbb{C}$.
- $g(x+iy) = \sin x \cdot \cosh y$, $\Omega_2 = \mathbb{C}$.

Úloha č. 7 [rezervoval(a): *Matej Merčiak*]

- $f(x+iy) = \sinh x \cdot \sin y$, $\Omega_1 = \mathbb{C}$.
- $g(x+iy) = \sinh x \cdot \sinh y$, $\Omega_2 = \mathbb{C}$.

Úloha č. 8 [rezervoval(a): *Radovan Švarc*]

- $f(x+iy) = \ln(x^2+y^2)$, $\Omega_1 = \{x+iy \in \mathbb{C}; x > 0, y > 0\}$.
- $g(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\Omega_2 = \{x+iy \in \mathbb{C}; x > 0, y > 0\}$.

Úloha č. 9 [rezervoval(a): *Ondřej Kincl*]

- $f(x+iy) = \exp x \cdot \sin y$, $\Omega_1 = \mathbb{C}$.
- $g(x+iy) = \exp x \cdot \exp y$, $\Omega_2 = \mathbb{C}$.

Úloha č. 10 [rezervoval(a): *Michaela Minaříková*]

- $f(x+iy) = \ln \frac{x}{y}$, $\Omega_1 = \{x+iy \in \mathbb{C}; x > 0, y > 0\}$.
- $g(x+iy) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $\Omega_2 = \{x+iy \in \mathbb{C}; x > 0, y > 0\}$.

Úloha č. 11 [rezervoval(a): *Andrej Uhliarik*]

- $f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\Omega_1 = \{x+iy \in \mathbb{C}; x > 0, y > 0\}$.
- $g(x+iy) = \frac{1}{x^2+y^2}$, $\Omega_2 = \{x+iy \in \mathbb{C}; x > 0, y > 0\}$.

Úloha č. 12 [rezervoval(a): *Jan Hanousek*]

- $f(x+iy) = \arcsin \frac{x}{y}$, $\Omega_1 = \{x+iy \in \mathbb{C}; 0 < x < y\}$.
- $g(x+iy) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\Omega_2 = \{x+iy \in \mathbb{C}; y > 0\}$.

Úloha č. 13 [rezervoval(a): *Soňa Šimonová*]

- $f(x+iy) = \arccos \frac{y}{x}$, $\Omega_1 = \{x+iy \in \mathbb{C}; 0 < y < x\}$.
- $g(x+iy) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\Omega_2 = \{x+iy \in \mathbb{C}; y < 0\}$.

Druhý typ příkladů: V následujících příkladech je zadána jedna komplexní funkce komplexní proměnné. Úkolem je najít všechny body v komplexní rovině, v nichž má tato funkce derivaci podle komplexní proměnné, a příslušnou derivaci spočítat.

Úloha č. 14 [rezervoval(a): *Hoang Phuong Thao*]

$$f(z) = z^4 + i(\overline{z})^4$$

Úloha č. 15 [rezervoval(a): *Daniel Rubín*]

$$f(z) = \sin z \cdot (1 - \exp \overline{z})$$

Úloha č. 16 [rezervoval(a): *Daniel Pacák*]

$$f(z) = (z + i\overline{z})^4$$

Úloha č. 17 [rezervoval(a): *Monica Lisacek*]

$$f(z) = \overline{z} \cdot \cos z$$

Úloha č. 18 [rezervoval(a): *Daniel Till*]

$$f(z) = \cos(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z)$$

Úloha č. 19 [rezervoval(a): *Luboš Krnáč*]

$$f(z) = \sin(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z)$$

Úloha č. 20 [rezervoval(a): *Denisa Dočekalová*]

$$f(z) = \exp(\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z) + i \exp(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)$$

Úloha č. 21 [rezervoval(a): *Alena Jarolímová*]

$$f(z) = \cos((z + i\overline{z})^2)$$

Úloha č. 22 [rezervoval(a): *Martin Tlapák*]

$$f(z) = \sin((z - i\overline{z})^2)$$

Úloha č. 23 [rezervoval(a): *Viktor Dolník*]

$$f(z) = \operatorname{Re}(z^2) + i \operatorname{Im}(z^3)$$

Úloha č. 24 [rezervoval(a): *Mikuláš Zindulka*]

$$f(z) = \operatorname{Re}(z^3) - i \operatorname{Im}(z^2)$$

Úloha č. 25 [rezervoval(a): *Anna Filipová*]

$$f(z) = \operatorname{Re}(z^4) + i(\operatorname{Im} z)^4$$

Úloha č. 26 [rezervoval(a): *Tomáš Ye*]

$$f(z) = \operatorname{Re}(\sin z) + i \sin \operatorname{Im} z$$

Úloha č. 27 [rezervoval(a): *Petra Štarmanová*]

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{\overline{z}}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Úloha č. 28 [rezervoval(a): *Peter Vook*]

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{|z|}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Úloha č. 29 [rezervoval(a): *Martina Nováková*]

$$f(z) = (z - i\overline{z})^3$$

Úloha č. 30 [rezervoval(a): *Zuzana Procházková*]

$$f(z) = \cos z \cdot \sin \overline{z}$$

Úloha č. 31 [rezervoval(a): *Jakub Fara*]

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin^2 z}{\overline{z}}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Úloha č. 32 [rezervoval(a): *Marián Poppr*]

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1-\cos z}{\overline{z}}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Úloha č. 33 [rezervoval(a): *Jan Kolář*]

$$f(z) = \cos^2 \overline{z}$$

Úloha č. 34 [rezervoval(a): *Ondřej Zeman*]

$$f(z) = \sin^3 \overline{z}$$

Třetí typ příkladů: Připomeňme, že $M_a(z)$ je „a-tá mocnina komplexního čísla z“, tj. množina definovaná v oddíle II.3. V následujících příkladech určete prvky zadané množiny a popište či načrtněte jejich umístění v komplexní rovině. Dále rozhodněte, zda některá z hodnot je reálná či ryze imaginární.

Úloha č. 35 [rezervoval(a): *Sandra Martinková*]

$$M_i(x), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 36 [rezervoval(a): *Lucie Švamberová*]

$$M_{2i}(x), \quad x \in (-\infty, 0).$$

Úloha č. 37 [rezervoval(a): *Anna Gajdová*]

$$M_{-i}(ix), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 38 [rezervoval(a): *Martin Jex*]

$$M_{\sqrt{3}}(x), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 39 [rezervoval(a): *Martin Surma*]

$$M_{\sqrt{5}}(x), \quad x \in (-\infty, 0).$$

Úloha č. 40 [rezervoval(a): *Jakub Hledík*]

$$M_{\sqrt{2}}(ix), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 41 [rezervoval(a): *Vojtěch Jurka*]

$$M_{\sqrt{3}}(x(1+i)), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 42 [rezervoval(a): *Martin Veselý*]

$$M_{\sqrt{2}}(x(1-i)), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 43 [rezervoval(a): *Veronika Křenčilová*]

$$M_{3i}(x(-1+i)), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 44 [rezervoval(a): *Martin Brodziansky*]

$$M_{1+i}(x), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 45 [rezervoval(a): *Martin Minasjan*]

$$M_{1-i}(x), \quad x \in (-\infty, 0).$$

Úloha č. 46 [rezervoval(a): *Ondřej Langr*]

$$M_{1+i}(x(1+i)), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 47 [rezervoval(a): *zatím nikdo*]

$$M_{1+i}(x(1-i)), \quad x \in (-\infty, 0).$$

Úloha č. 48 [rezervoval(a): *Michael Zelina*]

$$M_{xi}(xi), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 49 [rezervoval(a): *zatím nikdo*]

$$M_{1+xi}(1+xi), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 50 [rezervoval(a): *Martin Horčička*]

$$M_{x+i}(x+i), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 51 [rezervoval(a): *zatím nikdo*]

$$M_{\sqrt{3}}(x(\sqrt{3}+i)), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 52 [rezervoval(a): *zatím nikdo*]

$$M_{\sqrt{2}}(x(1-\sqrt{3}i)), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 53 [rezervoval(a): *zatím nikdo*]

$$M_{1+2i}(x(1+\sqrt{3}i)), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 54 [rezervoval(a): *zatím nikdo*]

$$M_{2+i}(x(\sqrt{3}-i)), \quad x \in (-\infty, 0).$$

Úloha č. 55 [rezervoval(a): *Jakub Prokop*]

$$M_{xi}(x), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 56 [rezervoval(a): *zatím nikdo*]

$$M_{x}(xi), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 57 [rezervoval(a): *zatím nikdo*]

$$M_{xi}(-x), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 58 [rezervoval(a): *zatím nikdo*]

$$M_{3+i}(x(1+i)), \quad x \in (-\infty, 0).$$

Úloha č. 59 [rezervoval(a): *zatím nikdo*]

$$M_{1+3i}(x(1-i)), \quad x \in (0, \infty).$$

Úloha č. 60 [rezervoval(a): *zatím nikdo*]

$$M_{xi}(-xi), \quad x \in (0, \infty).$$