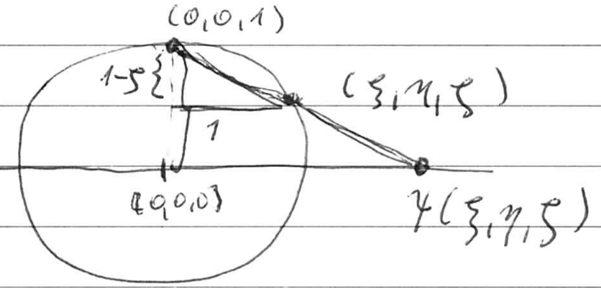
Věta IV.1 – stereografická projekce

$$S_2 := \{(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^3;\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1\}$$

$\chi : S_2 \to \overline{\mathbb{C}}$ definujme vzorcem

$$\chi(\xi,\eta,\zeta) = \begin{cases} \infty & (\xi,\eta,\zeta)=(0,0,1) \\ \dfrac{\xi+i\eta}{1-\zeta} & \text{jinak} \end{cases}$$

[1] Geometrická interpretace



[2] χ je prosté zobrazení S_2 na $\overline{\mathbb{C}}$

Protože $\chi(0,0,1)=\infty$, stačí ukázat, že χ je prosté zobrazení $S_2 \setminus \{(0,0,1)\}$ na $\mathbb{C}$

- zřejmě χ zobrazuje $S_2 \setminus \{(0,0,1)\}$ na $\mathbb{C}$
- najděme inverzní zobrazení $\lambda \in \mathbb{C}$. Hledáme $(\xi,\eta,\zeta) \in S_2 \setminus \{(0,0,1)\}$, že $\chi(\xi,\eta,\zeta)=\lambda$

Pak $$|\lambda| = \left|\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}\right| = \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{1-\zeta} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{1-\zeta} = \sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}}$$

$$|\lambda|^2 = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \Rightarrow |\lambda|^2(1-\zeta) = 1+\zeta \Rightarrow \zeta = \frac{|\lambda|^2-1}{|\lambda|^2+1}$$

Dale, $\operatorname{Re}\lambda = \dfrac{\xi}{1-\zeta}$, teda $\xi = (\operatorname{Re}\lambda)\cdot(1-\zeta) =$

$$= \operatorname{Re}\lambda \cdot \left(1 - \frac{|\lambda|^2-1}{|\lambda|^2+1}\right) =$$

$$= \frac{2\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2+1}$$

$\operatorname{Im}\lambda = \dfrac{\eta}{1-\zeta}$, teda $\eta = (\operatorname{Im}\lambda)\cdot(1-\zeta) = \dfrac{2\operatorname{Im}\lambda}{|\lambda|^2+1}$

Odtiaľ plynie jednak, že χ je prosté a na $\mathbb{C}$ pre ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{C}$

je $\chi^{-1}(\lambda) := \left(\dfrac{2\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2+1}, \dfrac{2\operatorname{Im}\lambda}{|\lambda|^2+1}, \dfrac{|\lambda|^2-1}{|\lambda|^2+1}\right) \in S_2 \setminus \{(0,0,1)\}$

a obraz pri χ je λ. Je teda χ na $\mathbb{C}$ a naviac

máme vzorec pre inverzné zobrazenie

$\boxed{3}$ $\chi|_{S_2\setminus\{(0,0,1)\}}$ je homeomorfizmus $S_2 \setminus \{(0,0,1)\}$ na $\mathbb{C}$

$\lceil$ Podľa $\boxed{2}$ je to prosté zobrazenie $S_2\setminus\{(0,0,1)\}$ na $\mathbb{C}$.
χ je spojité z definície, χ^{-1} spojité z uvedeného vzorca $\rfloor$

$\boxed{4}$ $(\xi,\eta,\zeta) \in S_2 \setminus \{(0,0,1)\} \Rightarrow$

$$\rho_e((\xi,\eta,\zeta),(0,0,1)) = \sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2} =$$

$$= \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\zeta+1} = \sqrt{2-2\zeta} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\zeta}$$

a $|\chi(\xi,\eta,\zeta)| = \sqrt{\dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}}$

pro $\varepsilon \in (0,2)$

Tedy: $\rho_e((\xi,\eta,\zeta),(0,0,1)) < \varepsilon \iff \sqrt{2}\sqrt{1-\zeta} < \varepsilon$

$$\iff 1-\zeta < \frac{\varepsilon^2}{2} \iff \zeta > 1 - \varepsilon^2/2$$

$$\iff \frac{1+\zeta}{1-\zeta} > \frac{2-\varepsilon^2/2}{\varepsilon^2/2} \iff |\psi(\xi,\eta,\zeta)| > \frac{\sqrt{4-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

$\boxed{5}$ $\rho^*(z,w) = \rho_e(\psi^{-1}(z), \psi^{-1}(w))$, $z,w \in \overline{\mathbb{C}}$

Pak ρ^* je metrika na $\overline{\mathbb{C}}$

$\rho^* \restriction \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ je ekvivalentní standardní metrice (viz $\boxed{3}$)

okolí ∞ v ρ^* odpovídají okolím ∞ v $\overline{\mathbb{C}}$

Tedy limita a spojitost v $\overline{\mathbb{C}}$ splývají s limitou a spojitostí v ρ^*.