Věta III.24 $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ spojitá,

$\forall \Delta abc \subset \Omega: \int_{\partial \Delta abc} f = 0$

$\Rightarrow f$ holomorfní na Ω

Dk: $z_0 \in \Omega$ lib., zvolme $r > 0$, ať $U(z_0, r) \subset \Omega$

Definujme $F(z) = \int_{[z_0, z]} f$, $z \in U(z_0, r)$. Pak F je primitivní funkce k f na $U(z_0, r)$.

Důkaz postupuje jako ve V13 .... $z \in U(z_0, r)$ zvolme $\delta \in (0, r - |z - z_0|)$, tj. ať $U(z, \delta) \subset U(z_0, r)$

Pak pro $h \in U(0, \delta)$, $h \neq 0$ je $\frac{1}{h}\left(F(z+h) - F(z)\right) = \frac{1}{h}\left(\int_{[z_0, z+h]} f - \int_{[z_0, z]} f\right) =$

$= \frac{1}{h} \int_{[z, z_0] \dotplus [z_0, z+h]} f = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f \longrightarrow f(z)$

předpoklad o trojúhelníku. Věta 2

$\Rightarrow F$ je holomorfní na $U(z_0, r)$, $f = F'$ je tedy holomorfní na $U(z_0, r)$ dle důsledku V15

Protože $z_0 \in \Omega$ je libovolné, f je holomorfní na Ω

Poznámka: VZ4 platí i v případě, že místo trojúhelníků uvažujeme obdélníky se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami

Stejně: $a=(a_1,a_2)\in\Omega$. Najdeme $r>0$, aby
$$U:=(a_1-r,a_1+r)\times(a_2-r,a_2+r)\subset\Omega$$

Pro $z=(z_1,z_2)\in U$ položme
$$F(z)=\int_{[(a_1,a_2),(z_1,a_2)]\dot+[(z_1,a_2),(z_1,z_2)]} f$$

Pak
$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{h_1+ih_2}\int_{[(z_1,z_2),(z_1+h_1,z_2)]\dot+[(z_1+h_1,z_2),(z_1+h_1,z_2+h_2)]} f \xrightarrow{h\to 0} f(z),$$

protože
$$\left|\frac{1}{h_1+ih_2}\int_{[(z_1,z_2),(z_1+h_1,z_2)]\dot+[(z_1+h_1,z_2),(z_1+h_1,z_2+h_2)]} f - f(z_1,z_2)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{h_1+ih_2}\int_{\dots}(f-f(z))\right| \le \underbrace{\frac{1}{|h|}\cdot(|h_1|+|h_2|)}_{\le 2}\cdot\underbrace{\max_{\substack{|w_1-z_1|\le|h_1|\\|w_2-z_2|\le|h_2|}}|f(w)-f(z)|}_{\to 0} \to 0$$

ze spoj. fce f