Věta III.23 $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, (f_n) posloupnost holomorfních funkcí na Ω, $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na Ω

$\Rightarrow f$ holomorfní na Ω a $\forall p \in \mathbb{N}$: $f_n^{(p)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(p)}$ na Ω.

Poznámka $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $\Omega \iff \forall K \subset \Omega$ kompaktní: $f_n \rightrightarrows f$ na K

$\lceil \Leftarrow$: $a \in \Omega \Rightarrow$ ex. $r > 0$, že $\overline{U(a,r)} \subset \Omega$. $\overline{U(a,r)}$ kompaktní, tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $\overline{U(a,r)}$, tedy i na $U(a,r)$

$\Rightarrow$: $K \subset \Omega$ kompaktní ... pro $x \in K$ ex. $r_x > 0$, že $U(x, r_x) \subset \Omega$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $U(x, r_x)$.

K kompaktní $\Rightarrow$ ex. $x_1, \dots, x_k \in K$: $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} U(x_j, r_{x_j})$.

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{j=1}^{k} U(x_j, r_{x_j})$, tedy i na K $\rfloor$

Důkaz Věty: **Krok 1:** f je holomorfní: víme, že f je spojitá.

$a \in \Omega$ libovolné, najdeme $r > 0$, aby $\overline{U(a,r)} \subset \Omega$

Dle V14 platí $f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f_n(w)}{w-z}\, dw$, $w \in U(a,r)$, $n \in \mathbb{N}$

kde φ je kladně or. kružnice o středu a a poloměru r

zvolme $z \in U(a,r)$ pevně.

Pak $\frac{f_n(w)}{w-z} \rightrightarrows \frac{f(w)}{w-z}$ na $\langle \varphi \rangle$

$\lceil \langle \varphi \rangle$ kompaktní $\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ na $\langle \varphi \rangle$

$$\left| \frac{f_n(w) - f(w)}{w-z} \right| \le \frac{|f_n(w) - f(w)|}{r - |z-a|} \rightrightarrows 0 \quad \rfloor$$

Tedy dle VZ (1) je

$$f(z) = \lim_n f_n(z) = \lim_n \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f_n(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Tedy $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}\,dw$, $z \in U(a,r)$

$\Rightarrow$ f je holomorfní na $U(a,r)$ dle VZ (4)

[$(z,w) \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$ je spojitá na $U(a,r) \times \langle\varphi\rangle$

a

$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(w)}{w-z}\right) = \frac{f(w)}{(w-z)^2}$ je též spojitá na $U(a,r) \times \langle\varphi\rangle$]

Protože $a \in \Omega$ bylo libovolné, dostáváme, že f je holomorfní na Ω.

$\boxed{\text{Krok 2}}$ $\forall p \in \mathbb{N}$: $f_n^{(p)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(p)}$

Zvolme $a \in \Omega$. Najdeme $r > 0$, ať $\overline{U(a,r)} \subset \Omega$.
Ukážeme, že $f_n^{(p)} \rightrightarrows f^{(p)}$ na $U(a, \frac{r}{2})$.

φ buď opět kladně orient. kružnice o středu a a poloměru r

Pak
$$\left.\begin{aligned} f_n^{(p)}(z) &= \frac{p!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f_n(w)}{(w-z)^{p+1}}\,dw \\ f^{(p)}(z) &= \frac{p!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{(w-z)^{p+1}}\,dw \end{aligned}\right\} z \in U(a,r) \quad (\text{z V 15})$$

$$z \in U(a, \tfrac{r}{2}) \Rightarrow \left|f_n^{(p)}(z) - f^{(p)}(z)\right| = \frac{p!}{2\pi}\left|\int_\varphi \frac{f_n(w)-f(w)}{(w-z)^{p+1}}\,dw\right| \leq$$

[$z \in U(a,r)$, $w \in \langle\varphi\rangle \Rightarrow |w-z| \geq |w-a| - |z-a| \geq \frac{r}{2}$]

$$\le \underbrace{\frac{p!}{2\pi} \cdot V(\varphi) \cdot \frac{\max\limits_{w \in \langle\varphi\rangle} |f_n(w) - f(w)|}{\left(\frac{r}{2}\right)^{p+1}}}$$

nezávisí na z a pro $n \to \infty$ jde k 0,
protože $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\varphi\rangle$.

To dokončuje důkaz, že $f_n^{(p)} \rightrightarrows f^{(p)}$ na $U(a, \frac{r}{2})$

Protože a bylo libovolné, máme $f_n^{(p)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(p)}$ na Ω.