Věta 14 f holomorfní na $\overline{U(a,r)}$, φ kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r,

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z}\, dw, \quad z \in U(a,r)$$

Dk: $\boxed{1}$ f holomorfní na $\overline{U(a,r)}$ znamená, že existuje $G \supset \overline{U(a,r)}$ otevřená a f je holomorfní na G
přitom lze vzít G hvězdovitou

[přesněji: ex. Ω otevřená hvězdovitá
$\overline{U(a,r)} \subset \Omega \subset G$

Ω lze zkonstruovat například takto:
$z \in S(a,r) = \{z \in \mathbb{C}, |z-a| = r\}$
$\Rightarrow$ ex. $\delta_z > 0$, že $U(z,\delta_z) \subset G$
stačí položit

$$\Omega = U(a,r) \cup \bigcup_{z \in S(a,r)} U(z,\delta_z)$$

Pak Ω je hvězdovitá a středem tam bod a]

$\boxed{2}$ Mějme tedy hvězdovitou $\Omega \supset \overline{U(a,r)}$ otevřenou, f holomorfní na Ω.
Zvolme libovolné $z \in U(a,r)$ a definujme funkci

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z), & w = z \end{cases}$$

Pak g je holomorfní na $\Omega \setminus \{z\}$
a spojitá na Ω (spojitost na $\Omega \setminus \{z\}$ plyne ze spojitosti f, spojitost v bodě z plyne z toho, že $g(z) = \lim_{w \to z} g(w)$)

Tedy podle Věty 13 je $\int_{\varphi} g = 0$

$z \notin \langle \varphi \rangle$

Tedy $0 = \int_\varphi g = \int_\varphi \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = \int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_\varphi \frac{f(z)}{w-z}\,dw$

Proto $\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{w-z}\,dw = f(z)\cdot \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{1}{w-z}\,dw$

$= f(z)\cdot \operatorname{ind}_\varphi z = f(z)$

($\operatorname{ind}_\varphi z = 1$, protože $\operatorname{ind}_\varphi z$ je konstantní na $U(a,r)$ [V11(2)]

a $\operatorname{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{1}{w-a}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+re^{it}-a}\, re^{it}\cdot i\,dt =$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} i\,dt = 1$)

Pozn: V bodě [1] šlo ukázat – ex. $\delta>0$, že $U(a, r+\delta) \subset G$

[Jako v bodě [1] pro $z \in S(a,r)$ zvolme $\delta_z > 0$, aby $U(z, \delta_z) \subset G$

Pak $U(z, \delta_z/2)$ je otevřené pokrytí $S(a,r)$, která je kompaktní

$\Rightarrow$ existuje konečné podpokrytí

$$S(a,r) \subset \bigcup_{j=1}^{m} U(z_j, \delta_{z_j}/2)$$

Nechť $\delta := \min\{\delta_{z_j}/2,\ j=1,\dots,m\}$. Pak $\delta>0$. Tvrdím, že $U(a, r+\delta) \subset G$:

Nechť $w \in U(a, r+\delta)$ .... $w_0 := a + r\cdot\frac{(w-a)}{|w-a|}$

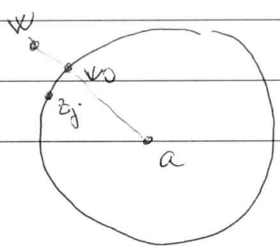
Pak $w_0 \in S(a,r)$, $|w-w_0| < \delta$

$(|w-w_0| = |(w-a)(1-\frac{r}{|w-a|})| = |w-a| - r < \delta)$

$\Rightarrow$ ex. j $|w_0 - z_j| < \delta_{z_j}/2$

$\Rightarrow |w - z_j| \le |w - w_0| + |w_0 - z_j| < \delta + \delta_{z_j}/2 \le \delta_{z_j}$

$\Rightarrow w \in U(z_j, \delta_{z_j}) \subset G$



Důsledek f holomorfní na $\overline{U(a,r)} \Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt$

Γ φ buď kružnice z V14. Pak dle V14 je

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{w-a}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{a+re^{it}-a}\cdot re^{it}\cdot i\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt \quad \rfloor$$

Věta III.15 f holomorfní na $\overline{U(a,R)} \Rightarrow f$ má na $U(a,R)$ derivace všech řádů a pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw, \quad z \in U(a,R)$$

(kde φ je kladně orient. kružnice obsahující a poloměru R)

Dk: Označme $f_n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$, $z \in U(a,R)$ $(n \in \mathbb{N}\cup\{0\})$

Dle V14 je $f_0 = f$ na $U(a,R)$

Dle V7 (4) je f_n holomorfní na $U(a,R)$ a $f_n' = f_{n+1}$

Γ $F_n(z,w) := \frac{n!}{2\pi i}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$, $(w,z) \in \langle\varphi\rangle \times U(a,R)$

$\Rightarrow F_n$ je spojitá. Navíc

$$\frac{\partial F_n}{\partial z}(z,w) = \frac{n!}{2\pi i}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\cdot(-(n+1))\cdot(-1) = F_{n+1}(z,w) \quad \rfloor$$

Důsledek: f holomorfní na $M \Rightarrow f'$ holomorfní na M

Γ $a \in M \Rightarrow$ ex. $r>0$, f holomorfní na $U(a,r)$, tedy na $\overline{U(a,\frac{r}{2})}$, dle V15 je f' holomorfní na $U(a,\frac{r}{2})$ $\rfloor$

Důsledek $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, $p \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ spojitá, holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Pak f je holomorfní na Ω

[Ex. $r > 0$, že $U(p,r) \subset \Omega$ $\quad U(p,r)$ hvězdovitá
$\Rightarrow$ f má na $U(p,r)$ primitivní funkci F
V13

Pak F je holomorfní na $U(p,r)$ $\Rightarrow$ $F' = f$ je holomorfní na $U(p,r)$
předchozí důsledek

$\Rightarrow f$ je holomorfní i v bodě p]

Poznámka o vztahu ke Gaussově větě o divergenci

$$f \text{ holomorfní na } \Omega \overset{\text{V I.3}}{\Rightarrow} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x},$$

tedy
$$0 = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y} = \operatorname{div}(\tilde{f}_1, -\tilde{f}_2) = \operatorname{div} \tilde{\bar{f}}$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y} = \operatorname{div}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_1) = -\operatorname{div} \widetilde{\overline{if}}$$

Pokud víme, že $\tilde{f}$ je třídy C^1 na Ω, pak pro každý $\Delta abc \subset \Omega$

$$\int_{\partial \Delta abc} \varphi = \int_{\langle \partial \Delta a,b,c \rangle} \langle \widetilde{\overline{if}} + i\tilde{\bar{f}}, \nu(z) \rangle \, d\mathcal{H}^1(z) \underset{\text{Gaussova věta}}{=} \int_{\operatorname{int} \Delta abc} \operatorname{div}(\widetilde{\overline{if}} + i\tilde{\bar{f}}) = 0$$

Tedy V12 plyne z Gaussovy věty a V15

(ovšem k důkazu V15 jsme využívali V12)