Věta III. 12 $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, f holomorfní na Ω,

$$\Delta abc \subset \Omega \Rightarrow \int_{\partial \Delta abc} f = 0$$

Vysvětlení: $\Delta abc = \mathrm{co}\{a, b, c\}$, tj. konvexní obal

$$\partial \Delta abc = [a,b] \dotplus [b,c] \dotplus [c,a]$$

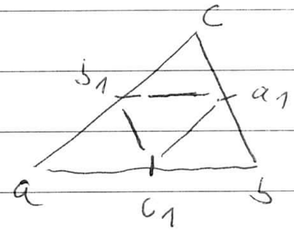
Důkaz: $\boxed{1}$ Pokud je Δabc degenerovaný, tj. body a, b, c leží na přímce, pak je integrál nulový pro každou spojitou f

[Dejme tomu, že b leží mezi a, c, tj.

a —— b —— c

Pak $\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f = \int_{[a,c]} f = -\int_{[c,a]} f$ dle Věta 1 (1-3)]

$\boxed{2}$ Předpokládejme, že Δabc je nedegenerovaný, označme $I = \left|\int_{\partial \Delta abc} f\right|$ a předpokládejme, že $I > 0$



Nechť a_1 je střed úsečky bc

b_1 — " — ac

c_1 — " — ab

Pak $$\int_{\partial \Delta abc} f = \int_{\partial \Delta a c_1 b_1} f + \int_{\partial \Delta c_1 b a_1} f + \int_{\partial \Delta a_1 c b_1} f + \int_{\partial \Delta a_1 b_1 c_1}$$

[Pravá strana $= \int_{[a,c_1]} f + \int_{[c_1,b_1]} f + \int_{[b_1,a]} f + \int_{[c_1,b]} f + \int_{[b,a_1]} f + \int_{[a_1,c_1]} f +$

$+ \int_{[a_1,c]} f + \int_{[c,b_1]} f + \int_{[b_1,a_1]} f + \int_{[a_1,b_1]} f + \int_{[b_1,c_1]} f + \int_{[c_1,a_1]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f$]

Teď existuje jeden z těchto čtyř trojúhelníků, pro který

$\left|\int_{\partial\Delta} f\right| \geq I/4$. Všechny čtyři jsou navzájem shodné a podobné původnímu s koeficientem $\frac{1}{2}$

$\boxed{3}$ Pokračujeme indukcí:

$\Delta_0 := \Delta abc \qquad \left|\int_{\partial\Delta_0} f\right| = I$

Δ_1 jeden z čtyř, pro který

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f\right| \geq I/4$$

Δ_1 rozdělíme stejným způsobem a vybereme Δ_2, až

$$\left|\int_{\partial\Delta_2} f\right| \geq I/4^2$$

atd. máme posloupnost (Δ_n) trojúhelníků, že $\left|\int_{\partial\Delta_n} f\right| \geq I/4^n$

a platí $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$, je to jeden z čtvrtin konstruovaný jako výše.

Protože $\operatorname{diam} \Delta_n = \frac{1}{2^n} \operatorname{diam} \Delta_0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$, Δ_n jsou uzavřené, neprázdné a $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$,

je $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n \neq \emptyset$ a v průniku je právě jeden bod.

Označíme ho z_0.

f je holomorfní v bodě z_0, $f'(z_0)$ bude derivace.

Funkce $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z-z_0)$ má primitivní funkci na $\mathbb{C}$, a tedy je pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\int_{\partial\Delta_n} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\right) dz = 0 \quad , \text{ a tedy}$$

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} \left(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)\right) dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz\right| \geq I/4^n \qquad (*)$$

$\boxed{4}$ Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existuje $\delta > 0$, že

pro $z \in U(z_0, \delta)$ je $\quad |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| \leq \varepsilon \cdot |z - z_0|$

Protože $z_0 \in \Delta_n$ a $\operatorname{diam} \Delta_n \to 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je $\Delta_n \subset U(z_0, \delta)$

Pak $\left|\int_{\partial\Delta_n} \left(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)\right)\right| \leq V(\partial\Delta_n) \cdot \max_{z \in \langle\partial\Delta_n\rangle} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)|$

$$\leq \frac{1}{2^n} V(\partial\Delta_0) \cdot \max_{z \in \langle\partial\Delta_n\rangle} \varepsilon |z - z_0| \leq \frac{\varepsilon}{2^n} V(\partial\Delta_0) \cdot \operatorname{diam} \Delta_n$$

$$= \frac{\varepsilon}{2^n} V(\partial\Delta_0) \cdot \frac{1}{2^n} \operatorname{diam} \Delta_0 = \frac{\varepsilon}{4^n} V(\partial\Delta_0) \cdot \operatorname{diam} \Delta_0$$

Kombinací nerovn. $(*)$ s právě odvozenou nerovností máme pro $n \geq n_0$

$$I/4^n \leq \varepsilon/4^n \cdot V(\partial\Delta_0) \operatorname{diam} \Delta_0$$

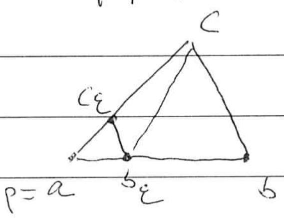
Neboli $\quad I \leq \varepsilon\, V(\partial\Delta_0) \cdot \operatorname{diam} \Delta_0$

Toto nezávisí na n, platí pro každé $\varepsilon > 0$, tedy $\underline{I = 0}$.
To je spor dokončující důkaz.

Důsledek $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, $p \in \Omega$, f spojitá na Ω, holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$, $\Delta abc \subset \Omega \Rightarrow \int_{\partial \Delta abc} f = 0$

Dk: (1) Pokud $p \notin \Delta abc$, pak tvrzení plyne z V12 aplikované na $\Omega \setminus \{p\}$

(2) p je jeden z vrcholů Δabc, např. $p = a$.



$\varepsilon \in (0,1)$ lib., $b_\varepsilon = a + \varepsilon(b-a)$

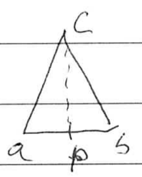
$c_\varepsilon = a + \varepsilon(c-a)$

Pak
$$\int_{\partial \Delta abc} f = \int_{\partial \Delta a b_\varepsilon c_\varepsilon} f + \underbrace{\int_{\partial \Delta b_\varepsilon b c} f}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial \Delta c c_\varepsilon b_\varepsilon} f}_{=0} = \int_{\partial \Delta a b_\varepsilon c_\varepsilon} f$$
dle (1)

Přitom
$$\left| \int_{\partial \Delta abc} f \right| = \left| \int_{\partial \Delta a b_\varepsilon c_\varepsilon} f \right| \leq V(\partial \Delta a b_\varepsilon c_\varepsilon) \cdot \max_{z \in \partial \Delta a b_\varepsilon c_\varepsilon} |f(z)| \leq$$
$$\leq \varepsilon \cdot V(\partial \Delta abc) \cdot \max_{z \in \Delta abc} |f(z)|$$
$< \infty$, f spojitá na kompaktním Δabc

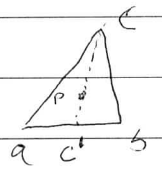
ε libovolně malé $\Rightarrow \int_{\partial \Delta abc} f = 0$

(3) p je ~~uprostřed~~ uvnitř strany Δabc, dejme tomu strany ab



$$\int_{\partial \Delta abc} f = \int_{\partial \Delta apc} f + \int_{\partial \Delta pbc} f = 0$$ dle případu (2)

(4) p je uvnitř Δabc



Nechť c' je průsečík polopřímky $\overrightarrow{cp}$ s úsečkou ab.

$$\int_{\partial \Delta abc} f = \int_{\partial \Delta a c' c} f + \int_{\partial \Delta c' b c} f = 0$$ dle případu (3)