Index bodu ke křivce a jeho vlastnosti.

φ uzavřená cesta, $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$

$$\operatorname{ind}_\varphi a := \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z-a}\, dz$$

Pozn: $\operatorname{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i} \Delta_\varphi \log(z-a)$

Γ plyne z Věty 9 .. $f(z) = z-a \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a}$ $\rfloor$

Věta III.11 $\nu(a) := \operatorname{ind}_\varphi a$, $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$

(1) ν nabývá jen celočíselných hodnot

Γ $\nu(a) = \frac{1}{2\pi i} \Delta_\varphi \log(z-a) = \frac{1}{2\pi i} (L(\beta) - L(\alpha))$

$\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$, $L(t)$ z V8 .. L spojitá, $e^{L(t)} = \varphi(t) - a$

Protože $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, je $e^{L(\alpha)} = e^{L(\beta)}$, tedy

$L(\beta) - L(\alpha)$ je celočíselný násobek $2\pi i$. Proto $\nu(a) \in \mathbb{Z}$ $\rfloor$

(2) ν je konstantní na každé komponentě $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$

Γ G buď komponenta $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Pak funkce

$(z,a) \mapsto \frac{1}{z-a}$ je spojitá na $\langle\varphi\rangle \times G$, dle V7(3)

je tedy fce ν spojitá na G

G souvislá $\Rightarrow$ $\nu(G)$ souvislá. Ovšem $\nu(G) \subset \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \nu(G)$ je jeden bod, tedy ν je konstantní na G $\rfloor$

(3) $I = 0$ na neomezené komponentě $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$

Γ $\langle \varphi \rangle$ kompaktní $\Rightarrow \exists\ R > 0 : \langle \varphi \rangle \subset U(0, R)$

Je-li $|a| > R$, je

$$|I(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1}{z-a} \, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot V(\varphi) \cdot \frac{1}{|a| - R} \xrightarrow{|a| \to \infty} 0$$

$$\frac{1}{|z-a|} \leq \frac{1}{|a| - R}$$

$$\left. \begin{array}{l} |z| < R \\ |a| > R \end{array} \right\} \Rightarrow |z-a| > |a| - R > 0$$

$\Rightarrow |I(a)|$ nabývá na neomezené komponentě hodnot libovolně blízkých nule. Kombinací s (1) a (2) vidíme, že zde $I = 0$. $\lrcorner$