Věta III. 8 a její důkaz

Obecný případ $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ křivka, $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá, f nenabývá 0 na $\langle\varphi\rangle$. Pak existuje $L : [a,b] \to \mathbb{C}$ spojitá, že $f(\varphi(t)) = e^{L(t)}$, $t \in [a,b]$.

Dk: $\boxed{1}$ $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \Rightarrow$ existuje $h : U(w,|w|) \to \mathbb{C}$ spojitá, že $e^{h(z)} = z$, $z \in U(w,|w|)$

Pokud $U(w,|w|) \cap (-\infty,0] = \emptyset$, lze vzít $h(z) = \log(z)$

Pokud $U(w,|w|) \cap (-\infty,0] \neq \emptyset$, lze vzít

$$h(z) = \begin{cases} \log z, & z \in U(w,|w|),\ \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \log z + 2\pi i, & z \in U(w,|w|),\ \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $\forall t \in [a,b]\ \exists \varepsilon > 0$, $L : (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap [a,b] \to \mathbb{C}$ spojitá, že $f(\varphi(s)) = e^{L(s)}$, $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap [a,b]$

$t \in [a,b] \Rightarrow w := f(\varphi(t)) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$\exists \varepsilon > 0$, že pro $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap [a,b]$ je $f(\varphi(s)) \in U(w,|w|)$
(díky spojitosti $f \circ \varphi$)
Je-li h funkce z bodu $\boxed{1}$ (pro w), pak
lze psát $L(s) = h(f(\varphi(s)))$, $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap [a,b]$

$\boxed{3}$ Bod $\boxed{2}$ nám dává pro každé $t \in [a,b]$ číslo $\varepsilon_t > 0$ a funkci L_t. Pak $(t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t)$, $t \in [a,b]$ je pokrytí intervalu $[a,b]$ otevřenými množinami, existuje tedy konečné podpokrytí, tj. ex. $t_1, \dots, t_k \in [a,b]$, že

$$[a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{k} (t_j - \varepsilon_{t_j}, t_j + \varepsilon_{t_j})$$

$\boxed{4}$ Pokud $\mu, \nu \in [a,b]$ a $(\mu-\varepsilon_\mu, \mu+\varepsilon_\mu) \cap (\nu-\varepsilon_\nu, \nu+\varepsilon_\nu) \neq \emptyset$ pak existuje $k \in \mathbb{Z}$, že

$$L_\mu(t) - L_\nu(t) = 2k\pi i, \quad t \in (\mu-\varepsilon_\mu, \mu+\varepsilon_\mu) \cap (\nu-\varepsilon_\nu, \nu+\varepsilon_\nu) \cap [a,b]$$

Γ $e^{L_\mu(t)} = e^{L_\nu(t)} \Rightarrow \forall t \; \exists k \;\; L_\mu(t) - L_\nu(t) = 2k\pi i$

protože $L_\mu - L_\nu$ je spojitá a definiční obor je interval, je obor hodnot též interval. Proto $L_\mu - L_\nu$ je konstantní! $\rfloor$

$\boxed{5}$ Mějme $t_1, \dots, t_k$ z bodu $\boxed{3}$. Definujme L postupně takto:

Zvolme $j_1 \in \{1, \dots, k\}$, aby $a \in (t_{j_1} - \varepsilon_{t_{j_1}}, t_{j_1} + \varepsilon_{t_{j_1}})$

a položme $L(t) = L_{t_{j_1}}(t)$, ~~$t \in [a, t_{j_1} + \varepsilon_{t_{j_1}})$~~
$t \in (t_{j_1} - \varepsilon_{t_{j_1}}, t_{j_1} + \varepsilon_{t_{j_1}}) \cap [a,b]$

Pokud $b < t_{j_1} + \varepsilon_{t_{j_1}}$, jsme hotovi.

Pokud $b \geq t_{j_1} + \varepsilon_{t_{j_1}}$, položme $a_1 = t_{j_1} + \varepsilon_{t_{j_1}}$ a najděme $j_2 \in \{1, \dots, k\}$,
aby $a_1 \in (t_{j_2} - \varepsilon_{t_{j_2}}, t_{j_2} + \varepsilon_{t_{j_2}})$. Nutně $j_2 \neq j_1$

Dle $\boxed{4}$ existuje $m_1 \in \mathbb{Z}$ $L_{t_{j_2}} - L_{t_{j_1}} = 2m_1\pi i$ na průniku def. oborů

Rozšiřme L takto:

$$L(t) = \begin{cases} L(t), & t \in [a, a_1) \quad \text{(již definováno)} \\ L_{t_{j_2}}(t) - 2m_1\pi i, & t \in (t_{j_2} - \varepsilon_{t_{j_2}}, t_{j_2} + \varepsilon_{t_{j_2}}) \cap [a,b] \end{cases}$$

Pokud $b < t_{j_2} + \varepsilon_{t_{j_2}}$, jsme hotovi, máme L na $[a,b]$

Pokud $b \geq t_{j_2} + \varepsilon_{t_{j_2}}$, položme $a_2 = t_{j_2} + \varepsilon_{t_{j_2}}$.

Najdeme j_3, že $a_2 \in (t_{j_3} - \varepsilon_{t_{j_3}}, t_{j_3} + \varepsilon_{t_{j_3}})$. Nutně $j_3 \notin \{j_1, j_2\}$
a opět rozšíříme L. Pokračujeme podobně, nejpozději po k krocích budeme mít L na $[a,b]$.

Jednoznačnost: L_1, L_2 dvě fce splňující zadání
$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ $L_1 - L_2 = 2k\pi i$

[Důkaz je stejný jako bod $\boxed{4}$ obecného případu
— $L_1 - L_2$ je spojitá fce s hodnotami v $\{2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
tedy nabývá konstantně jedné z těchto hodnot.]

Speciální případ: φ cesta, f holomorfní na $\langle \varphi \rangle$,
f' spojitá na $\langle \varphi \rangle$

$$\Rightarrow \text{lze vzít} \quad L(t) = \log f(\varphi(a)) + \int_a^t \frac{f'(\varphi(s))}{f(\varphi(s))}\,\varphi'(s)\,ds$$

[$\frac{f'}{f}$ je spojitá na $\langle \varphi \rangle \Rightarrow \frac{f' \circ \varphi}{f \circ \varphi} \cdot \varphi'$ je integrovatelná na $[a,b]$
(omezená + měřitelná)

$\Rightarrow$ L daná vzorcem je spojitá na $[a,b]$ (spojitost integrálu podle horní meze)

Zbývá ukázat, že $e^{L(t)} = f(\varphi(t))$ pro $t \in [a,b]$

Definujme fci $g(t) = f(\varphi(t)) \cdot e^{-L(t)}$, $t \in [a,b]$

Pak g je spojitá na $[a,b]$, $g(a) = 1$, až na konečně mnoho bodů z (a,b) platí

$$g'(t) = (f \circ \varphi)'(t)\, e^{-L(t)} + f(\varphi(t))\, e^{-L(t)} \cdot (-L'(t)) =$$
$$= f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot e^{-L(t)} + f(\varphi(t))\, e^{-L(t)} \cdot \left(-\frac{f'(\varphi(t))}{f(\varphi(t))}\,\varphi'(t)\right)$$

$= 0$. Je tedy g konstantní na $[a,b]$, tedy $g = 1$ na $[a,b]$.

Tj. $e^{L(t)} = f(\varphi(t))$, $t \in [a,b]$.

Důkaz je hotov]

Přírůstek logaritmu: φ, f, L jako ve V8

$$\Delta_\varphi \log(f) := L(b) - L(a)$$

Věta III.9 φ cesta, f holomorfní na $\langle\varphi\rangle$, f' spojitá na $\langle\varphi\rangle$

$$\Rightarrow \Delta_\varphi \log(f) = \int_\varphi \frac{f'}{f}$$

Nechť L je daná vzorcem z V8

$$\int_\varphi \frac{f'}{f} = \int_a^b \frac{f'(\varphi(t))}{f(\varphi(t))}\,\varphi'(t)\,dt \overset{V8}{=} L(b) - L(a)$$