

III.2 Integrály a křivkové integrály závislé na parametru

Věta 6 (o derivaci integrálu podle komplexní proměnné). Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast. Nechť funkce $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ splňuje následující podmínky:

- (1) Pro každé $z \in \Omega$ je funkce $t \mapsto F(t, z)$ měřitelná na intervalu I .
- (2) Pro skoro všechna $t \in I$ má funkce $z \mapsto F(t, z)$ spojitou derivaci podle komplexní proměnné na Ω .
- (3) Existuje $z_0 \in \Omega$, pro které je funkce $t \mapsto F(t, z_0)$ integrovatelná na I .
- (4) Pro každé $z \in \Omega$ existuje U okolí z a integrovatelná funkce h na I , pro kterou platí $|\frac{\partial F}{\partial z}(t, w)| \leq h(t)$ pro všechna $w \in U$ pro skoro všechna $t \in I$.

Potom funkce

$$g(z) = \int_I F(t, z) dt, \quad z \in \Omega$$

je holomorfní na Ω a pro $z \in \Omega$ platí

$$g'(z) = \int_I \frac{\partial F}{\partial z}(t, z) dt.$$

Poznámka: V předchozí větě lze interval I nahradit libovolným prostorem s mírou.

Věta 7 (o záměně křivkového integrálu a ...). Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je cesta.

- (1) Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce a tyto funkce nechť na $\langle \varphi \rangle$ konvergují stejnoměrně k funkci f . Pak $\int_\varphi f_n \rightarrow \int_\varphi f$.
- (2) Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce a tyto funkce nechť na $\langle \varphi \rangle$ konvergují bodově ke spojité funkci f . Je-li posloupnost funkce (f_n) stejně omezená na $\langle \varphi \rangle$, pak $\int_\varphi f_n \rightarrow \int_\varphi f$.
- (3) Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a $F : \langle \varphi \rangle \times G \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak funkce

$$g(w) = \int_\varphi F(z, w) dz, \quad w \in G$$

je spojitá na G .

- (4) Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $F : \langle \varphi \rangle \times G \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce a parciální derivace funkce F podle druhé proměnné (tj. derivace funkce $w \mapsto F(z, w)$ podle komplexní proměnné) je spojitá na $\langle \varphi \rangle \times G$. Potom funkce

$$g(w) = \int_\varphi F(z, w) dz, \quad w \in G$$

je holomorfní na G a pro $w \in G$ platí

$$g'(w) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial w}(z, w) dz.$$