Věta III.7 a její důkaz

Nechť $\varphi: [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta

(1) $f_n : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$ spojité, $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle \varphi \rangle$

Pak $\int_\varphi f_n \to \int_\varphi f$.

[f je též spojitá, stejnoměrná limita spojitých fcí

$$\left| \int_\varphi f_n - \int_\varphi f \right| = \left| \int_\varphi (f_n - f) \right| \leq V(\varphi) \cdot \max_{z \in \langle \varphi \rangle} |f_n(z) - f(z)| \to 0$$

$f_n \rightrightarrows f$]

(2) $f_n : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$ spojité, $f : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$ spojitá, $f_n \to f$ bodově na $\mathbb{C}$, posloupnost (f_n) je stejně omezená na $\langle \varphi \rangle$

$$\Rightarrow \int_{\varphi_n} f \to \int_\varphi f$$

[Nechť $C > 0$ splňuje $|f_n(z)| \leq C$, $z \in \langle \varphi \rangle$, $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\varphi f_n = \int_a^b f_n(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt.$$

Přitom $f_n(\varphi(t))\varphi'(t) \to f(\varphi(t))\varphi'(t)$ až na konečně mnoho bodů (dělicích bodů), tedy s. v.

$$|f_n(\varphi(t))\varphi'(t)| \leq C \cdot \sup_t |\varphi'(t)|$$

[φ cesta $\Rightarrow \varphi'$ omezená]

máme tedy integrovatelnou majorantu, podle Lebesgueovy věty je $\int_a^b f_n(\varphi(t))\varphi'(t) \to \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\varphi f$]

(3) $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ otevřená, $F : \langle\varphi\rangle \times G \to \mathbb{C}$ spojitá

$\Rightarrow g(w) = \int_\varphi F(z,w)\,dz$, $w \in G$ je spojitá na G

Zvolme $a \in G$ libovolné. Najdeme $r>0$, aby $\overline{U(a,r)} \subset G$.
Protože $\langle\varphi\rangle \times \overline{U(a,r)}$ je kompaktní (omezená uzavřená podmnožina $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$),

je F omezená na této množině, tedy ex. $C>0$, že

$|F(z,w)| \le C$ pro $z \in \langle\varphi\rangle$, $w \in \overline{U(a,r)}$

Pak $g(w) = \int_a^b F(\varphi(t), w)\,\varphi'(t)\,dt$, $w \in \overline{U(a,r)}$

- $t \mapsto F(\varphi(t), w) \cdot \varphi'(t)$ je měřitelná
- $w \mapsto F(\varphi(t), w)\,\varphi'(t)$ je spojitá (pro s.v. t, přesnějí až na konečně mnoho)
- Fce $(t,w) \mapsto F(\varphi(t), w)\,\varphi'(t)$ je omezená (konstanta $C \cdot \sup_{t\in[a,b]} |\varphi'(t)|$),

máme tedy integrovatelnou majorantu

Dle věty o spojitosti integrálu podle parametru je g spojitá na $\overline{U(a,r)}$, speciálně v bodě a.
Tím je důkaz hotov.

(4) $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, $F: \langle\varphi\rangle \times G \to \mathbb{C}$ spojitá na $\langle\varphi\rangle \times G$

$(z,w) \mapsto \frac{\partial F}{\partial w}(z,w)$ spojitá na $\langle\varphi\rangle \times G$

$\Rightarrow g(w) = \int_\varphi F(z,w)\,dz$, $w \in G$ je holomorfní na G

a pro $w \in G$ platí $g'(w) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial w}(z,w)\,dz$.

[Z bodu (3) plyne, že g je definovaná (a spojitá) na G

Použijeme větu 6:

$w_0 \in G$, zvolme $r > 0$, aby $\overline{U(w_0,r)} \subset G$

Pak $\frac{\partial F}{\partial w}$ je omezená na $\langle\varphi\rangle \times \overline{U(w_0,r)}$ (jako v bodě (3))

Aplikujme V6 na funkci $g(w) = \int_a^b F(\varphi(t),w)\,\varphi'(t)$

Jsou splněny předpoklady V6: (1), (2) jasné

(3) .. za z_0 lze vzít libovolné $w \in U(w_0,r)$

(4) $\frac{\partial F}{\partial w}(\varphi(t),w) \cdot \varphi'(t)$ je omezená

na ~~$\langle\varphi\rangle$~~ $[a,b] \times U(w_0,r)$

Teď závěr plyne z V6.]