Věta III.5 $\Omega \subset \mathbb{C}$ oblast (tj. otevřená souvislá)

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ spojitá. NPJE

(i) f má v Ω primitivní funkci

(ii) $\varphi : [a,b] \to \Omega$, $\psi : [c,d] \to \Omega$ dvě cesty, $\varphi(a) = \psi(c)$, $\varphi(b) = \psi(d) \Rightarrow \int_\varphi f = \int_\psi f$

(iii) $\forall \varphi : [a,b] \to \Omega$ uzavřená cesta : $\int_\varphi f = 0$

Dk: (i) $\Rightarrow$ (iii) z Větičky III.3

(iii) $\Rightarrow$ (ii) φ, ψ jako výše $\Rightarrow \varphi \dotplus (\dot{-}\psi)$ je uzavřená cesta v Ω

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{\varphi \dotplus (\dot{-}\psi)} f \overset{V1(3)}{=} \int_\varphi f + \int_{\dot{-}\psi} f \overset{V1(2)}{=} \int_\varphi f - \int_\psi f$$

Tedy $\int_\varphi f = \int_\psi f$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $a \in \Omega$ pevné. Pro každé $z \in \Omega$ nechť φ_z je nějaká lomená čára v Ω spojující a a z. Pak φ_z je cesta v Ω

Definujme $F(z) = \int_{\varphi_z} f$, $z \in \Omega$ (Dle předpokladu nezávisí na volbě φ_z)

Tvrdíme, že F je primitivní fce k f na Ω.
Zvolme $z \in \Omega$ lib., $R > 0$, ať $U(z,R) \subset \Omega$. Pak pro $h \in U(0,R) \setminus \{0\}$ je

$$\frac{1}{h}\big(F(z+h) - F(z)\big) = \frac{1}{h}\left(\int_{\varphi_{z+h}} f - \int_{\varphi_z} f\right) = \frac{1}{h} \int_{(\dot{-}\varphi_z) \dotplus \varphi_{z+h}} f =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f \xrightarrow{h \to 0} f(z)$$

Větička III.2

úsečka $z, z+h \subset U(z,R) \subset \Omega$ + předpoklad (ii).