Věta 4 $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená. NPJE

(a) Ω je souvislá

(b) Ω je křivkově souvislá

(c) každé dva body v Ω lze spojit lomenou čárou.

Připomeňme: • Ω souvislá $\stackrel{df}{\equiv}$ $\emptyset \neq G \subset \Omega$, G otevřená, $\Omega \setminus G$ otevřená $\Rightarrow G = \Omega$

• Ω křivkově souvislá $\equiv$ $\forall a, b \in \Omega \ \exists \varphi : [0,1] \to \Omega$ spojitá, že $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$

• (c) znamená, že $\forall z, w \in \Omega \ \exists u_0, u_1, \dots, u_n \in \Omega$, že $u_0 = z$, $u_n = w$ a $\forall j \in \{1 \dots n\}$: úsečka a $u_{j-1} u_j$ je obsažena v Ω

Důkaz (c) $\Rightarrow$ (b) lomená čára je speciální případ křivky

⌈ $z, w \in \Omega$, $u_0, u_1, \dots, u_n$ body z definice lomené čáry.
Pak $\varphi : [0,1] \to \Omega$ definovaná předpisem

$$\varphi(t) = u_{j-1} + (t \cdot n - j + 1) \cdot (u_j - u_{j-1}), \quad t \in \left[\tfrac{j-1}{n}, \tfrac{j}{n}\right]$$

je spojitá, $\varphi(0) = z$, $\varphi(1) = w$ ⌋

(b) $\Rightarrow$ (a) Nechť Ω je křivkově souvislá. Nechť $G \subset \Omega$ splňuje: $\emptyset \neq G$, $\Omega \setminus G \neq \emptyset$, G otevřená, $\Omega \setminus G$ otevřená.
Zvolme $a \in G$, $b \in \Omega \setminus G$. Dle (b) existuje $\varphi : [0,1] \to \Omega$ spojitá, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$

Označme $U = \varphi^{-1}(G)$, $V = \varphi^{-1}(\Omega \setminus G)$. Pak $U, V \subset [0,1]$ jsou relativně otevřené, $U \cup V = [0,1]$, $U \cap V = \emptyset$, $0 \in U$, $1 \in V$.
To je spor, protože $[0,1]$ je souvislý.

⌈podrobněji: Nechť $\alpha = \sup U$. Pak $\alpha > 0$, protože ex. $r > 0$, že $[0, r) \subset U$ (U otevřená, $0 \in U$).
Kdyby $\alpha \in V$, pak ex. $\varepsilon > 0$, že $(\alpha - \varepsilon, \alpha] \subset V$, tedy $\alpha - \varepsilon$ je menší horní závora, což je spor. Proto $\alpha \notin V$, čili $\alpha \in U$.

Protože $1 \in V$, dostáváme $\alpha < 1$. U otevřená $\Rightarrow$ ex. $\varepsilon > 0$, že $[\alpha, \alpha + \varepsilon) \subset U$. Proto α není horní závora U.

To je spor. ∎

(a) $\Rightarrow$ (c) Zvolme $z_0 \in \Omega$ pevně (Pokud $\Omega = \emptyset$, je to triviální)

Označme

$$G = \{ w \in \Omega ;\ w \text{ lze spojit se } z \text{ lomenou čarou} \}$$

Pak $G \neq \emptyset$, protože $z \in G$

G otevřená: $w \in G \Rightarrow w \in \Omega$, Ω otevřená $\Rightarrow \exists r > 0\ U(w, r) \subset \Omega$.
Pokud $y \in U(w, r)$, pak úsečka wy je obsažena v $U(w, r)$ (koule je konvexní), tedy i v Ω.
$w \in G \Rightarrow$ ex. lomená čára spojující z a w obsažená v Ω. Pokud k ní přidáme úsečku wy, dostaneme lomenou čáru v Ω spojující z a y. Proto $y \in G$.
Tedy $U(w, r) \subset G$

$\Omega \setminus G$ otevřená: $w \in \Omega \setminus G \Rightarrow w \in \Omega$, tedy ex. $r > 0$, $U(w, r) \subset \Omega$.
Tvrdím, že $U(w, r) \subset \Omega \setminus G$. Kdyby ne, pak existuje $y \in U(w, r) \cap G$. Existuje lomená čára v Ω spojující z a y. Přidáme-li k ní úsečku yw, dostaneme lomenou čáru v Ω spojující z a w, tedy $w \in G$, což je spor.

Závěr: $G \neq \emptyset$, G otevřená, $\Omega \setminus G$ otevřená $\Rightarrow G = \Omega$
(definice souvislosti)