Větička III.1 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ cesta

Nechť $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ je dělení z definice cesty

(1) $h : [c,d] \to [a,b]$ rostoucí, na, $\mathcal{C}^1$

$\Rightarrow \int_{\varphi \circ h} f = \int_{\varphi} f$ pro každou $f : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$ spojitou

⌈ Zřejmě $\varphi \circ h$ je též cesta, příslušné dělení $c = h^{-1}(t_0) < h^{-1}(t_1) < \dots < h^{-1}(t_n) = d$
a $\langle \varphi \circ h \rangle = \langle \varphi \rangle$

Přitom $$\int_{\varphi \circ h} f = \sum_{j=1}^{n} \int_{h^{-1}(t_{j-1})}^{h^{-1}(t_j)} f(\varphi(h(t))) \cdot \varphi'(h(t))\, h'(t)\, dt =$$

$$\overset{\text{věta o substituci}}{=} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\varphi(s))\varphi'(s)\, ds = \int_{\varphi} f$$ ⌋

(2) $\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_{\varphi} f$ pro $f : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$ spojitou

⌈ Připomeňme $\dot{-}\varphi(t) = \varphi(-t)$, $t \in [-b, -a]$
Zřejmě $\dot{-}\varphi$ je cesta, příslušné dělení $-b = -t_n < -t_{n-1} < \dots < -t_0 = -a$
a zřejmě $\langle \dot{-}\varphi \rangle = \langle \varphi \rangle$

(věta o substituci)

$$\int_{\dot{-}\varphi} f = \sum_{j=1}^{n} \int_{-t_j}^{-t_{j-1}} f(\varphi(-t)) \cdot \varphi'(-t) \cdot (-1)\, dt =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\varphi(s))\varphi'(s)\, ds = -\int_{\varphi} f$$ ⌋

(3) $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ cesta splňující $\psi(c) = \varphi(b)$,

pak $\int\limits_{\varphi \dot{+} \psi} f = \int\limits_{\varphi} f + \int\limits_{\psi} f$ pro každou spojitou $f : \langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle \to \mathbb{C}$.

⌈ Nechť $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d$ je dělení svědčící o tom, že ψ je cesta. Pak dělení

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b = s_0 + b - c < s_1 + b - c < \dots < s_m + b - c = d + b - c$

je dělení svědčící o tom, že $\varphi \dot{+} \psi$ je cesta.

Označme $h(s) = s + c - b$, $s \in [b, d+b-c]$ je rostoucí zobrazení třídy C^1 na $[c,d]$. Pak máme

$$\int\limits_{\varphi \dot{+} \psi} f = \int\limits_{\varphi} f + \int\limits_{\psi \circ h} f \overset{(1)}{=} \int\limits_{\varphi} f + \int\limits_{\psi} f. \rfloor$$

(4) $\left| \int\limits_{\varphi} f \right| \le V(\varphi) \cdot \max\limits_{z \in \langle\varphi\rangle} |f(z)|$ pro $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitou

$$\left| \int\limits_{\varphi} f \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \right| \overset{\Delta\text{-nerovnost} + \text{Věta I.2}}{\le}$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|\,dt \le \max_{z \in \langle\varphi\rangle} |f(z)| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\varphi'(t)| =$$

$$= \max_{z \in \langle\varphi\rangle} |f(z)| \cdot V(\varphi) \rfloor$$

Větička III. 2 f spojitá na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{[a,a+h]} f = f(a)$$

Dk: f spojitá na okolí bodu $a \Rightarrow \exists\, r > 0$, že f je spojitá na $U(a,r)$.

Pak pro $h \in U(0,r)$ je $\int_{[a,a+h]} f$ definováno.

Nechť teď $h \in U(0,r) \setminus \{0\}$. Pak

$$\left| \left(\frac{1}{h} \int_{[a,a+h]} f \right) - f(a) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{[a,a+h]} (f - f(a)) \right| \overset{V1(4)}{\leq}$$

$$\int_{[a,a+h]} f(a) = \int_0^1 f(a) \cdot h \, dt = f(a) \cdot h$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \cdot \underbrace{V([a,a+h])}_{=|h|} \cdot \max_{z \in [a,a+h]} |f(z) - f(a)| =$$

$$= \max_{z \in [a,a+h]} |f(z) - f(a)| \xrightarrow{h \to 0} 0$$, protože f je spojitá v bodě a

($\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$, že pro $z \in U(a,\delta)$ je $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$

Pak pro $h \in U(0,\delta) \setminus \{0\}$ je $\max_{z \in [a,a+h]} |f(z) - f(a)| < \varepsilon$)

Věta III.3 $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, $f: G \to \mathbb{C}$ spojitá,
F primitivní funkce z f na G (tj. $F'(z) = f(z)$, $z \in G$)
Pak $\forall \varphi: [a,b] \to G$ cesta: $\int_\varphi f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

Spec., je-li φ uzavřená, je $\int_\varphi f = 0$

Dk: Nechť $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ je dělení z definice cesty.

Pak $\int_\varphi f = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$

$= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (F \circ \varphi)'(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} F(\varphi(t_j)) - F(\varphi(t_{j-1}))$

$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

φ uzavřená, tj. $\varphi(b) = \varphi(a)$ $\Rightarrow$ integrál je zřejmě 0.