

II.3 Logaritmus, argument, obecná mocnina

Definice.

- **Reálný logaritmus**, tj. inverzní funkci k $\exp|_{\mathbb{R}}$ budeme značit \ln .
- Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ označme

$$\text{Log}(z) = \{w \in \mathbb{C} : \exp(w) = z\}.$$

- Necht' $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. **Hlavní hodnotou logaritmu** čísla z nazýváme takové $w \in \text{Log}(z)$, pro které $\text{Im } w \in (-\pi, \pi]$. Hlavní hodnotu logaritmu čísla z značíme $\log(z)$.
- Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definujeme

$$\text{Arg}(z) = \{\text{Im } w : w \in \text{Log}(z)\}$$

a

$$\arg(z) = \text{Im } \log(z).$$

Číslo $\arg(z)$ nazýváme **hlavní hodnota argumentu** čísla z .

Věta 5.

- (1) Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je $\text{Log}(z) \neq \emptyset$ a platí $\text{Log}(z) = \{\log(z) + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.
- (2) Funkce \log je inverzní funkcí k funkci $\exp|_{\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \in (-\pi, \pi]\}}$.
- (3) Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $\log(z) = \ln |z| + i \arg(z)$.
- (4) Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $z = |z|(\cos \arg(z) + i \sin \arg(z))$ (**goniometrický zápis komplexního čísla z**).
- (5) Necht' $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Pak platí

$$\arg(z) = \begin{cases} \arcsin \frac{\text{Im } z}{|z|} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{je-li } \text{Re } z > 0, \\ \arccos \frac{\text{Re } z}{|z|} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{je-li } \text{Im } z > 0, \\ -\arccos \frac{\text{Re } z}{|z|} = -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{je-li } \text{Im } z < 0. \end{cases}$$

- (6) Funkce \arg je spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- (7) Funkce \log je spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- (8) Funkce \log je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a na této množině platí $\log'(z) = \frac{1}{z}$.

Definice. Necht' $z, a \in \mathbb{C}$, přičemž $z \neq 0$. Pak definujeme

- $M_a(z) = \{\exp(aw) : w \in \text{Log}(z)\}$ (**a -tá mocnina komplexního čísla z**)
- $m_a(z) = \exp(a \log(z))$ (**hlavní hodnota a -té mocniny komplexního čísla z**)
- Je-li $z > 0$, značíme $z^a = m_a(z) = \exp(a \ln(z))$.

Větička 6. Necht' $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- (1) Je-li $n \in \mathbb{Z}$, obsahuje množina $M_n(z)$ právě jeden prvek, a to prvek z^n , kde

$$z^0 = 1; \quad z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n\text{-krát}} \text{ pro } n > 0; \quad z^n = \frac{1}{z^{-n}} \text{ pro } n < 0.$$

- (2) Je-li $n \in \mathbb{N}$, obsahuje množina $M_{1/n}(z)$ právě n prvků.