Obecná mocnina a důkaz Věty II. 6

$z, a \in \mathbb{C},\ z \neq 0$: $M_a(z) := \{\exp(aw);\ w \in \mathrm{Log}(z)\}$

$m_a(z) := \exp(a \lg z)$

$z > 0$: $z^a := m_a(z) = \exp(a \ln z)$

V6 Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(1) $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow M_n(z) = \{z^n\}$

$n = 0$: $M_0(z) = \{\exp(0 . w) ; w \in \mathrm{Log}(z)\} = \{1\}$

$n \in \mathbb{N}$: $M_n(z) = \{\exp(n(\lg z + 2k\pi i));\ k \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{\exp(n \lg z + 2kn\pi i);\ k \in \mathbb{Z}\} \overset{V4(11)}{=} \{\exp(n \lg z)\}$

$\overset{V3(E3)}{=} \{(\exp(\lg z))^n\} = \{z^n\}$

$n < 0$, tj. $-n \in \mathbb{N}$: stejně jako v předchozím případě
$M_n(z) = \{\exp(n \lg z)\}$ Dále

$$\exp(n \lg z) \underset{V3(E2, E3)}{=} \frac{1}{\exp(-n \lg z)} \underset{V3(E3)}{=} \frac{1}{(\exp(\lg z))^{-n}} = \frac{1}{z^{-n}} = z^n$$

(2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow M_{1/n}(z)$ má právě n prvků:

$M_{1/n}(z) = \{\exp(\frac{1}{n}(\lg z + 2k\pi i));\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\exp(\frac{1}{n} \lg z) \cdot \exp(2\frac{k}{n}\pi i);\ k \in \mathbb{Z}\}$

Přitom $\exp(\frac{1}{n} \lg z) \neq 0$ a nezávisí na k

$\exp(2\frac{k_1}{n}\pi i) = \exp(2\frac{k_2}{n}\pi i) \Leftrightarrow \frac{2k_1\pi i}{n} - \frac{2k_2\pi i}{n}$ je násobek $2\pi i$

$\Leftrightarrow k_1 - k_2$ je násobek n. Prvků je zde právě n, jak jsme chtěli.