Mocniné řady

(M) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ ($a \in \mathbb{C}$, (c_n) posl. komplexních čísel)

$R := \sup \{ r \in [0,\infty) ; \sum |c_n| r^n$ konverguje $\}$

<u>Důkaz Věty II.1</u>

(1) Řada (M) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $U(a,R)$

Nechť $r \in (0,R)$. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (z-a)^n|$ konverguje stejnoměrně na $\overline{U(a,r)}$, protože pro $z \in \overline{U(a,r)}$ platí $|z-a| \le r$, a tedy

$|c_n (z-a)^n| \le |c_n| r^n$. Dále z definice R existuje $r_0 > r$, že $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r_0^n$ konverguje.

Nyní tvrzení plyne z Weierstrassova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci.

(2) $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Pak $R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & L>0 \\ \infty, & L=0. \end{cases}$

Plyne z odmocninového kritéria

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n| r^n} = r \cdot L \quad \text{pro } r>0$$

Tedy řada konverguje, pokud $rL<1$ a diverguje, pokud $rL>1$

(3) Existuje-li $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$, rovná se číslu L z (2)

⌈ plyne z podílového kritéria a z (2)

$$A := \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|\, r^{n+1}}{|c_n|\, r^n} = r\cdot A$$

Řada konverguje, pokud $rA<1$, diverguje pro $rA>1$

Nutně tedy $L = A$ ⌋

(4) Mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$

mají stejný poloměr konvergence jako (M)

⌈ Použijeme (2): Nechť $L := \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$

Příslušné číslo pro první řadu je

$$\limsup \sqrt[n]{(n+1)|c_{n+1}|} = \limsup \underbrace{\sqrt[n]{n+1}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \sqrt[n]{|c_{n+1}|} =$$

$$= 1 \cdot \limsup \sqrt[n]{|c_{n+1}|} = \limsup \left(\sqrt[n+1]{|c_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}} =$$

$$= \limsup \exp\Big(\underbrace{\underbrace{\tfrac{n+1}{n}}_{\downarrow \atop 1} \ln \underbrace{\sqrt[n+1]{|c_{n+1}|}}_{\downarrow \atop L}}_{\downarrow \atop \ln L}\Big) = L$$

($\ln L$ & $-\infty$ pro $L=0$, & $+\infty$ pro $L=\infty$)

Pro druhou řadu lze postupovat podobně. Nebo lze použít, že (M) vznikne z 2. řady stejně jako první řada vznikne z (M). ⌋

Důkaz Věty II.2.

Uvažme mocninnou řadu (M), nechť $R > 0$ je poloměr konvergence. $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in U(a,R)$

(i) f je spojitá na $U(a,R)$

dle Věty 1(1) řada konverguje lokálně stejnoměrně na $U(a,R)$, jednotlivé členy jsou spojité funkce, tedy i součet je spojitá funkce

(ii) f je holomorfní na $U(a,R)$ a $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$, $z \in U(a,R)$

Řada ve vzorci vznikla derivací člen po členu. Dle V1(4) má stejný poloměr konvergence jako (M), dle V1(1) tedy konverguje lokálně stejnoměrně na $U(a,R)$. Z věty o záměně limity a derivace plyne tvrzení.

Kromě toho bylo toto tvrzení dokázáno elementárně (bez stejnoměrné konvergence) v MA2

(iii) $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ je holomorfní na $U(a,R)$

a $F'(z) = f(z)$ pro $z \in U(a,R)$

Dle V1(4) má řada v definici F poloměr konvergence R (stejný jako (M)), tvrzení tedy plyne z (ii) aplikované na F místo f.