Věta V.8 f holomorfní na $U(a,R)$, $b := f(a)$, f nekonst., $f-b$ má v bodě a kořen násobnosti $p \in \mathbb{N}$.

Pak $\exists\, r \in (0,R)\ \exists\, \varrho > 0\ \forall w \in P(b,\varrho)$ f nabývá hodnoty w v právě p různých bodech z $U(a,r)$.

Dk: f není konstantní na $U(a,R) \Rightarrow$ ex. $r \in (0,R)$, že $f' \not\equiv 0$ na $\overline{U(a,r)} \setminus \{a\}$ a také $f \not\equiv b$ na $\overline{U(a,r)} \setminus \{a\}$ [díky větě o jednoznačnosti IV.21]

Zvolme $\varrho > 0$, $\varrho < \min\{|f(z)-b| ;\ |z-a| = r\}$

Nechť $w \in P(b,\varrho)$. Aplikujme V7 pro $K = \overline{U(a,r)}$ a funkce $f-b$, $f-w$.

$z \in \partial K \Rightarrow |z-a| = r \Rightarrow$
$|(f(z)-b) - (f(z)-w)| = |w-b| < \varrho < |f(z)-b|$

Proto $\underbrace{\sum_{\substack{z \in U(a,r) \\ f(z)=b}} N_{f-b}(z)}_{=\,p} = \sum_{\substack{z \in U(a,r) \\ f(z)=w}} N_{f-w}(z)$

p, protože jediný takový bod je a, a tam je násobnost p.

Navíc, pokud $f(z) = w$, $z \in U(a,r)$, pak $z \neq a$ (protože $w \neq b$), a tedy $f'(z) \neq 0$, proto násobnost z jako kořen $f-w$ je 1.

Proto počet kořenů $f-w$ v $U(a,r)$ je roven p. ∎

Věta V.9 $\Omega \subset \mathbb{C}$ oblast, f nekonstantní holomorfní funkce na Ω $\Rightarrow$ f je otevřené zobrazení.

Dk: Nechť $G \subset \Omega$ otevřená. Nechť $b \in f(G)$. Zvolme $a \in G$, ať $f(a) = b$. Zvolme $R > 0$, ať $U(a,R) \subset G$. Protože f není konstantní a Ω je oblast, má funkce $f - b$ v bodě $\underline{a}$ kořen násobnosti $p \in \mathbb{N}$ (pro vhodné p).

Dle V8 existují příslušná r a ρ, splňující

$$U(b,\rho) \subset f(U(a,r)) \subset f(G).$$

Proto je $f(G)$ otevřená.

Věta V.10 Nechť f je holomorfní na $U(a,R)$, $f'(a) \neq 0$

Pak $\exists$ $r > 0$:
(i) f je prostá na $U(a,r)$
(ii) $G = f(U(a,r))$ je otevřená
(iii) f^{-1} je holomorfní na G

a $$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}, \quad z \in G$$

Dk: $f'(a) \neq 0 \Rightarrow f - f(a)$ má v bodě $\underline{a}$ kořen násobnosti 1.
f' spojitá $\Rightarrow$ BÚNO $f' \neq 0$ na $U(a,R)$
Dle V8 existuje $r_0 \in (0,R)$ a $\rho > 0$, že $\forall w \in P(f(a),\rho)$: f nabývá hodnoty w právě v jednom bodě z $U(a,r_0)$.

f spojitá v a $\Rightarrow$ ex. $r \in (0,r_0)$, že $f(U(a,r)) \subset U(f(a),\rho)$.

Pak zjevně f je prostá na $U(a,r)$.

Navíc dle V9 je $f \upharpoonright U(a,r)$ otevřené zobrazení, speciálně $G = f(U(a,r))$ je otevřená a $f^{-1}: G \to U(a,r)$ je spojitá.

Spočítáme derivaci f^{-1}: $z \in G \Rightarrow$

$$(f^{-1})'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(z)}{w - z} = \lim_{w \to z} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(z)}{f(f^{-1}(w)) - f(f^{-1}(z))} =$$

$$= \lim_{u \to f^{-1}(z)} \frac{u - f^{-1}(z)}{f(u) - f(f^{-1}(z))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$$

limita složené funkce

$\lim_{w \to z} f^{-1}(w) = f^{-1}(z)$, protože f^{-1} je spojitá

navíc f^{-1} je prostá. To dokončuje důkaz.

Věta V.11 f holomorfní a prostá na otevřené $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pak $\forall z \in \Omega$: $f'(z) \neq 0$ & f^{-1} je holomorfní na $f(\Omega)$

Dk: Pokud $f'(z) = 0$, pak buď f je konstantní 0 na okolí z, tedy není prostá,

nebo $f - f(z)$ má v bodě z kořen násobnosti $p \geq 2$.

zvolme pak r a g z V8. Pak f není prostá na $U(a,r)$, spor.

Tedy vskutku $f'(z) \neq 0$ pro $z \in \Omega$.

Holomorfnost f^{-1} plyne z V10

[$a \in \Omega \Rightarrow \exists r > 0$ $f(U(a,r)) \subset \Omega$, f^{-1} prostá na $f(U(a,r))$.

Protože $a \in \Omega$ je libovolné, f^{-1} je holomorfní na $f(\Omega)$.]