Věta V.2 $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, Γ cykl, $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$
& $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega : \operatorname{ind}_\Gamma a = 0$

$\Rightarrow$ $\forall f$ holomorfní na Ω platí

$$(*) \quad \int_\Gamma f = 0$$

$$(**) \quad f(z) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw, \quad z \in \Omega \setminus \langle\Gamma\rangle$$

Důkaz: $\boxed{1}$ $(*)$ plyne z $(**)$:

Nechť f je holomorfní na Ω. Zvolme libovolné $a \in \Omega \setminus \langle\Gamma\rangle$ a definujme $g(z) = (z-a)\cdot f(z)$, $z \in \Omega$.
Pak g je holomorfní na Ω a $g(a) = 0$.
Tedy z $(**)$ aplikované na g plyne:

$$0 = g(a)\cdot \operatorname{ind}_\Gamma a = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(w)}{w-a}\, dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\, dw$$

Tedy $\int_\Gamma f = 0$

$\boxed{2}$ V několika krocích dokážeme $(**)$:

- $\boxed{2.1}$ $K := \{z \in \mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle ;\ \operatorname{ind}_\Gamma z \neq 0\} \cup \langle\Gamma\rangle$ je kompaktní podmnožina Ω

Γ • je to podmnožina Ω: dle předpokladu $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$ a $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega : \operatorname{ind}_\Gamma z = 0$

• je uzavřená:
$\Omega \setminus K = \{z \in \mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle ;\ \operatorname{ind}_\Gamma z = 0\}$ je otevřená, protože je to sjednocení některých komponent $\mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle$ a ty jsou otevřené (viz V III.10, 11)

• je omezená: $\langle\Gamma\rangle$ je kompaktní $\Rightarrow$ ex. $R>0$ $\langle\Gamma\rangle \subset U(0,R)$
Pak $\mathbb{C}\setminus\overline{U(0,R)} \subset \mathbb{C}\setminus\langle\Gamma\rangle$, je to část neomezené komponenty ~~na~~ $\mathbb{C}\setminus\langle\Gamma\rangle$, a tedy na této množině je index nulový (V $\underline{\text{III}}$,11 (3))
Tudíž $K \subset U(0,R)$

$\boxed{2.2}$ zvolme $z \in \Omega\setminus\langle\Gamma\rangle$ libovolné, dále pevné.
Pak $K_z = K \cup \{z\}$ je kompaktní podmnožina Ω.
Nechť Δ je „cykl v Ω okolo K_z" dle Věty 1.

$$\text{Pak}\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \underset{\text{vlastnost (V)}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{1}{w-z}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{f(u)}{u-w}\,du\right)dw$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma\int_\Delta \underbrace{\frac{f(u)}{(w-z)(u-w)}}_{\text{spojité na } \langle\Gamma\rangle\times\langle\Delta\rangle}\,du\,dw \overset{\text{Fubini}}{=} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Delta\int_\Gamma \frac{f(u)}{(w-z)(u-w)}\,dw\,du =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Delta \frac{f(u)}{u-z}\cdot\left(\int_\Gamma \left(\frac{1}{w-z}+\frac{1}{u-w}\right)dw\right)du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{f(u)}{u-z}\cdot\left(\operatorname{ind}_\Gamma z - \underbrace{\operatorname{ind}_\Gamma u}_{\substack{\parallel\\ 0}}\right)du = \qquad u \in \langle\Delta\rangle \subset \Omega\setminus K$$

$$= \operatorname{ind}_\Gamma z\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{f(u)}{u-z}\,du \underset{\text{vlastnost (V)}}{=} \operatorname{ind}_\Gamma z\cdot f(z)$$

Dodatek: Použili jsme Fubiniovu větu:

$F: \langle\varphi\rangle \times \langle\psi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá $\Rightarrow \int_\varphi \int_\psi F(z,w)\,dz\,dw =$

$= \int_\psi \int_\varphi F(z,w)\,dw\,dz$, které plyne ze standardní Fubiniovy věty

[$\varphi: [a,b] \to \mathbb{C}$
$\psi: [c,d] \to \mathbb{C}$ cesty

$$\int_\varphi \int_\psi F(z,w)\,dz\,dw = \int_\varphi \int_c^d F(z,\psi(t))\psi'(t)\,dt\,dw =$$

$$= \int_a^b \int_c^d \underbrace{F(\varphi(s),\psi(t))\psi'(t)\varphi'(s)}_{\text{omezená měřitelná funkce na } [a,b]\times[c,d]}\,dt\,ds$$

$\Rightarrow$ lze použít klasickou Fubiniovu větu]

Poznámky: (1) Podmínka na $\mathrm{ind}_\Gamma a$ je nutná:
jestliže $\forall f$ holomorfní na Ω: $\int_\Gamma f = 0$, pak $\forall a \in \mathbb{C}\setminus\Omega: \mathrm{ind}_\Gamma a = 0$

[$a \in \mathbb{C}\setminus\Omega$

$$\Rightarrow \mathrm{ind}_\Gamma a = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z-a}\,dz = 0$$

holomorfní funkce na Ω]

(2) $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ souvislá $\Rightarrow$ podmínky splněny pro každý $\langle\Gamma\rangle\subset\Omega$.

[$\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$ cykl $\Rightarrow \exists\, R>0$ $\langle\Gamma\rangle \subset U(0,R)$. Pak na $\mathbb{C}\setminus U(0,R)$ je index 0. Pokud $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ je souvislá, pak $(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega)\cup(\mathbb{C}\setminus U(0,R))$ je souvislá, tedy $(\mathbb{C}\setminus\Omega)\cup(\mathbb{C}\setminus U(0,R))$ je souvislá, a tedy $\mathbb{C}\setminus\Omega \subset$ neomezená komponenta $\mathbb{C}\setminus\langle\Gamma\rangle$.]