Věta V.1 $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, $\emptyset \neq K \subset \Omega$ kompaktní

$\Rightarrow$ existuje cykl Γ s vlastnostmi:

(i) $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega \setminus K$

(ii) $\operatorname{ind}_\Gamma z$ nabývá jen hodnot 0 a 1

(iii) $\operatorname{ind}_\Gamma z = 1$, $z \in K$

(iv) $\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$

(v) $\forall f$ holomorfní na Ω: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$, $z \in K$.

Dk: $\boxed{1}$ $\Omega = \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ najdeme $R>0$, ať $K \subset U(0,R)$

a za Γ vezmeme kladně orient. kružnici o středu 0 a poloměru R

$\boxed{2}$ Nechť $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$. Pak $\operatorname{dist}(K, \Omega \setminus \mathbb{C}) > 0$

[vzdálenost kompaktní a uzavřené množiny]

zvolme tedy $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{dist}(K, \Omega \setminus \mathbb{C})$

Pro $m,n \in \mathbb{Z}$ položme

$$Q_{m,n} := [m\delta, (m+1)\delta] \times [n\delta, (n+1)\delta] = \{x+iy;\ x \in [m\delta, (m+1)\delta],\ y \in [n\delta, (n+1)\delta]\}$$

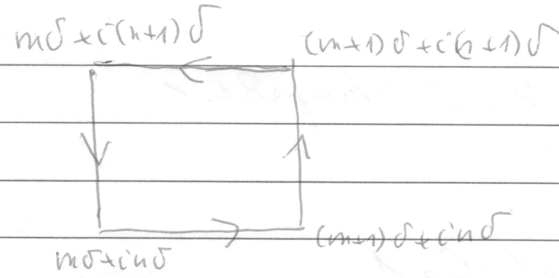
Pak platí: $\operatorname{diam} Q_{m,n} = \delta \cdot \sqrt{2}$, tedy

$$Q_{m,n} \cap K \neq \emptyset \Rightarrow Q_{m,n} \subset \Omega \qquad (*)$$

Dále označme

$$\mathcal{H}_{m,n} = \{[m\delta + in\delta, (m+1)\delta + in\delta], [(m+1)\delta + in\delta, (m+1)\delta + i(n+1)\delta], [(m+1)\delta + i(n+1)\delta, m\delta + i(n+1)\delta], [m\delta + i(n+1)\delta, m\delta + in\delta]\}$$

$$\partial Q_{m,n} = [m\delta + in\delta, (m+1)\delta + in\delta] \dotplus [(m+1)\delta + in\delta, (m+1)\delta + i(n+1)\delta] \dotplus [(m+1)\delta + i(n+1)\delta, m\delta + i(n+1)\delta] \dotplus [m\delta + i(n+1)\delta, m\delta + in\delta]$$



$Q_{m,n}$ = čtverec (uzavřený)

$\partial Q_{m,n}$ = kladně orientovaná hranice

$\mathcal{H}_{m,n}$ = množina čtyř orientovaných úseček tvořících kladně orientovanou hranici

Označme $\mathcal{Q} := \{Q_{m,n};\ m,n \in \mathbb{Z},\ Q_{m,n} \cap K \neq \emptyset\}$

$$\mathcal{H} := \bigcup\{\mathcal{H}_{m,n};\ Q_{m,n} \in \mathcal{Q}\}.$$

Pozorování: $\left.\begin{array}{l}\bigcup \mathcal{Q} \subset \Omega, \quad \mathcal{Q} \text{ je konečná množina} \\ K \subset \operatorname{Int} \bigcup \mathcal{Q}\end{array}\right\}$ (**)

⌈ K kompaktní ⇒ omezená, existuje tedy $N \in \mathbb{N}$, že

$$K \subset (-N\delta, N\delta)\times(-N\delta, N\delta) = \{x+iy;\ x \in (-N\delta, N\delta),\ y \in (-N\delta, N\delta)\}$$

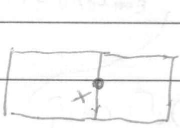
Tedy $\mathcal{Q} \subset \{Q_{m,n};\ m,n \in (-N, N-1)\}$, je to tedy konečná množina.

Navíc z (*) plyne, že $\bigcup \mathcal{Q} \subset \Omega$

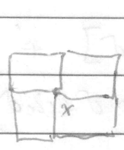
$x \in K$ ⇒ uvažme všechny $Q_{m,n}$, které obsahují x.

Jsou tři možnosti:

- $x \in \operatorname{Int} Q_{m,n}$ pro nějaké $Q_{m,n}$.
  Pak $x \in \operatorname{Int} \bigcup \mathcal{Q}$, protože $\operatorname{Int} Q_{m,n} \subset \operatorname{Int} \bigcup \mathcal{Q}$



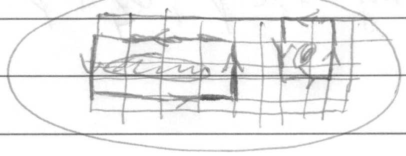
- x leží na straně nějakého $Q_{m,n}$, ale není vrcholem ⇒ tato strana je společná dvěma čtvercům, obsaženým v $\mathcal{Q}$, tedy $x \in \operatorname{Int} \bigcup \mathcal{Q}$



- x je vrcholem nějakého čtverce ⇒ tento vrchol je společný čtyřem čtvercům, všechny čtyři patří do $\mathcal{Q}$, tedy $x \in \operatorname{Int} \bigcup \mathcal{Q}$ ⌋

Dále označme $\mathcal{H}_0 := \{[a,b] \in \mathcal{H} \,;\, [b,a] \notin \mathcal{H}\}$

Cykl Γ bude tvořen orientovanými úsečkami z $\mathcal{H}_0$



($\square$) Platí: $[a,b] \in \mathcal{H}_0 \Rightarrow \langle [a,b] \rangle \subset \Omega \setminus K$

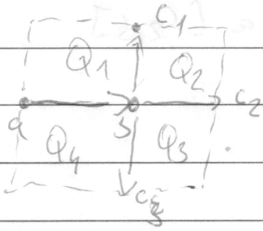
$\ulcorner$ $[a,b] \in \mathcal{H}_0 \Rightarrow [b,a] \notin \mathcal{H}_0$,

tedy jeden z čtverců se stranou $[a,b]$ patří do q a druhý nikoli.

$\Rightarrow \langle [a,b] \rangle \subset \partial \bigcup q$ … (hranice množiny $\bigcup q$)

$\overset{(**)}{\Rightarrow} \langle [a,b] \rangle \subset \Omega \setminus K$ $\lrcorner$

Uvažme zobrazení $\eta : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ definované následovně:



Označme c_1, c_2, c_3 tři vrcholy, do nichž vede nějaká hrana, která je stranou nějakého čtverce $Q_{m,n}$, vycházející z bodu b, různé od a, číslované ve směru hodinových ručiček.

Označme $Q_1, \dots, Q_4$ čtverce jako na obrázku.

$\eta([a,b]) = [b, c_j]$, kde $j \in \{1,2,3\}$ nejmenší takové, že $[b, c_j] \in \mathcal{H}_0$

Takové j existuje: $[a,b] \in \mathcal{H}_0 \Rightarrow Q_1 \in q,\ Q_4 \notin q$

Pokud $Q_2 \notin q$, pak $j = 1$ $\left([b,c_1] \in \mathcal{H},\ [c_1,b] \notin \mathcal{H} \right)$

Pokud $Q_2 \in q$, pak buď $Q_3 \notin q$ a $j = 2$

$\left([b,c_1], [c_1,b], [b,c_2] \in \mathcal{H},\ [c_2,b] \notin \mathcal{H} \right)$

nebo i $Q_3 \in q$, pak $j = 3$

($\mathcal{H}$ obsahuje $[b,c_1], [c_1,b], [b,c_2], [c_2,b], [b,c_3]$ a ne $[c_3,b]$)

η je prosté: Pokud $\eta([a_1,b_1]) = \eta([a_2,b_2])$, pak nutně $b_1 = b_2$

Uvažme proto situaci z předchozího obrázku, kdy $Q_1 \in q$, $Q_4 \notin q$.
Rozeberme možnosti:

- $Q_1 \in q$, $Q_2, Q_3 \notin q$
  $\Rightarrow$ jediná úsečka v $\mathcal{H}_0$, která končí v b, je $[a,b]$
  $$\eta([a,b]) = [b, c_1]$$
- $Q_1, Q_2 \in q$, $Q_3 \notin q$
  $\Rightarrow$ jediná úsečka v $\mathcal{H}_0$, která končí v b, je $[a,b]$
  $$\eta([a,b]) = [b, c_2]$$
- $Q_1, Q_3 \in q$, $Q_2 \notin q$
  $\Rightarrow$ úsečky z $\mathcal{H}_0$, které končí v b, jsou $[a,b]$ a $[c_2,b]$
  Přitom $\eta([a,b]) = [b, c_1]$
  $$\eta([c_2,b]) = [b, c_3]$$
- $Q_1, Q_2, Q_3 \in q$
  $\Rightarrow$ jediná úsečka z $\mathcal{H}_0$, která končí v b, je $[a,b]$
  $$\eta([a,b]) = [b, c_3]$$

Z tohoto rozboru plyne, že η je prosté.

Nyní úsečky z $\mathcal{H}_0$ uspořádejme do cyklu:
I buď úsečka z $\mathcal{H}_0$. Uvažme posloupnost
$I_1, I_2, I_3, \dots$ úseček z $\mathcal{H}_0$, kde $I_1 = I$
a $I_{n+1} = \eta(I_n)$, $n \in \mathbb{N}$
Protože $\mathcal{H}_0$ je konečná, v posloupnosti se musí úsečky opakovat.

Označme $m := \min\{n \in \mathbb{N} ;\ \exists k \in \mathbb{N}, k < n : I_k = I_n\}$
Protože $I_2 \neq I_1$, je $m > 2$. Protože η je prosté, je
nutně $I_m = I_1$ (kdyby $I_m = I_k$ pro $1 < k < m$, pak $I_{m-1} = I_{k-1}$,
spor s minimalitou m)

Pak máme tedy $I_1, \dots, I_{m-1}$ prostou posloupnost, $\eta(I_{m-1}) = I_1$. Proto

$$\gamma(I) := I_1 \dotplus I_2 \dotplus \dots \dotplus I_{m-1} \text{ je uzavřená}$$

cesta.

Takto $\mathcal{H}_0$ rozdělíme do několika uzavřených cest, které dohromady tvoří cykl

(Zvolme $I \in \mathcal{H}_0$ ... najdu $I_1, \dots, I_{m-1}$ jako výše, vezmeme $\gamma(I)$

Dále vezmeme $J \in \mathcal{H}_0$ různé od $I_1, \dots, I_{m-1}$ (pokud existuje) a najdeme $J_1, \dots, J_{k-1}$, $\gamma(J)$

Pokud existuje prvek $\mathcal{H}_0$ různý od $I_1, \dots, I_{m-1}, J_1, \dots, J_{k-1}$, vezmeme ho a vezmeme $\gamma(\cdot)$, atd.

dokud nevyčerpáme $\mathcal{H}_0$)

Máme tedy cykl Γ. Tvrdím, že má vlastnosti (i) – (v):

(i) plyne z ($\square$)

Uvažme funkci h spojitou na $\langle \Gamma \rangle$ a definujme funkci

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h(w)}{w-z}\, dw, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$$

Pak g je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$ (dle věty III.7(4))

Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup \{ \langle [a,b] \rangle ; [a,b] \in \mathcal{H} \} = \mathbb{C} \setminus \bigcup \{ \langle \partial Q \rangle ; Q \in q \}$ platí

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h(w)}{w-z}\, dw = \sum_{[a,b] \in \mathcal{H}_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{[a,b]} \frac{h(w)}{w-z}\, dw =$$

$$= \sum_{[a,b] \in \mathcal{H}} \frac{1}{2\pi i} \int_{[a,b]} \frac{h(w)}{w-z}\, dw = \sum_{Q \in q} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{h(w)}{w-z}\, dw$$

Aplikujme pro $h \equiv 1$, pak $g(z) = \operatorname{ind}_\Gamma z$

Tedy pro $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup\{[a,b];\ [a,b] \in \mathcal{H}\}$ je

$$\operatorname{ind}_\Gamma z = \sum_{Q\in q} \operatorname{ind}_{\partial Q} z = \begin{cases} 1, & \text{pokud } z \in \operatorname{Int} Q \text{ pro nějaké } Q \in q \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

Odsud ihned plyne (iv).
Vzorec neurčuje index na celém $\mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle$, vyloučili jsme navíc úsečky $[a,b] \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_0$. Pokud je ovšem z na takové úsečce a není na $\langle\Gamma\rangle$, pak je v téže komponentě $\mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle$, jako vnitřek příslušných čtverců z q, a tedy má index 1.

To dává (ii) a (iii). (Spolu s (**))

Nakonec ukažme (v): Pokud ~~je~~ $h = f \restriction \langle\Gamma\rangle$, kde f je holomorfní na Ω, pak pro $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup\{[a,b];\ [a,b] \in \mathcal{H}\}$

$$g(z) = \sum_{Q\in q} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{f(w)}{w-z}\, dw}_{= \begin{cases} 0 & z \notin Q \\ f(z) & \text{pro } z \in \operatorname{Int} Q \end{cases}}$$

dle Věty IV.3
(pro ∂Q platí Cauchyova věta díky Větě III.12, $\partial\Omega$ lze rozložit na dva trojúhelníky )

Tedy $g(z) = f(z)$ pro $z \in \bigcup_{Q\in q} \operatorname{Int} Q$

Toto sjednocení je husté v $\operatorname{Int} \bigcup q$, f i g jsou spojité, tedy $f = g$ na $\operatorname{Int} \bigcup q$, tedy i na K.

To dokončuje důkaz (v).