Důkaz Věty IV.12 f holomorfní na $P(a,R)$ $(=P(a,0,R))$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ buď Laurentova řada f v $P(a,R)$

Pak:

(1) f má v bodě a odstranitelnou singularitu $\Leftrightarrow \forall n<0: a_n=0$

[$\Leftarrow$: L.Ř. je pak mocninná řada, její součet je holomorfní na $U(a,R)$ (viz Věta II.2 (ii))

$\Rightarrow$: f má odstr. singularitu $\Rightarrow$ po dodefinování je holomorfní na $U(a,R)$, dle Věty III.16 je tam součtem mocninné řady. Mocninná řada je speciální případ L.Ř., díky jednoznačnosti Laurentova rozvoje tedy splývá s původní L.Ř.
Tedy $a_n=0$ pro $n<0$]

(2) f má v bodě a pól násobnosti $p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{-p} \neq 0$ & $\forall n<-p: a_n=0$

[$\Leftarrow$: Pak zřejmě $\lim_{z\to a} (z-a)^p f(z) = a_{-p} \neq 0$,

tedy f má v bodě a pól násobnosti p.

$\Rightarrow$: f má pól násob. $p \overset{V2}{\Rightarrow} f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + g(z)$,

kde $c_{-p},\dots,c_{-1} \in \mathbb{C}$, $c_{-p} \neq 0$, g holomorfní v $U(a,R)$

Pak g lze rozvinout do mocninné řady v $U(a,R)$ (V III.16),
$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in U(a,R)$

Pak $f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in P(a,R)$

To je L.Ř. Z jednoznačnosti rozvoje splývá s původní řadou.
Tedy původní řada má zřejmě požadované vlastnosti.]

(3) f má v bodě $\underline{a}$ podstatnou singularitu

$\iff a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$

⌈ jde o zbývající případ ⌋

Nanic, $\operatorname{res}_a f = a_{-1}$

⌈ $\rho \in (0,R)$, φ kladně or. kružnice o středu $\underline{a}$ a poloměru ρ

$$\Rightarrow \operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi f = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n\,dz \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi a_n (z-a)^n\,dz$$

V III.7(1)
řada konv. stejnoměrně na $\langle\varphi\rangle$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{a_{-1}}{z-a}\,dz = a_{-1}$$

$\leftarrow \operatorname{ind}_\varphi a = 1$

pro $n \neq -1$ má fukce $(z-a)^n$ primitivní funkci na $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, tedy integrál je 0 ⌋