Věta IV.11 f holomorfní v $P(a,r,R) \Rightarrow$
f je v $P(a,r,R)$ součtem Laurentovy řady
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$, která v $P(a,r,R)$ konverguje.

Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

kde φ_ρ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru ρ, kde $\rho \in (r,R)$ je libovolné.

Dk: $\boxed{1}$ Jednoznačnost. Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $z \in P(a,r,R)$, $\rho \in (r,R)$ a φ_ρ je jako výše. Pak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\rho} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n-1}}\,dz =$$

Laurentova řada konverguje na $P(a,r,R)$
Dle V8 konverguje lokálně stejnoměrně na $P(a,r,R)$, tedy stejnoměrně na kompaktní množině $\langle\varphi_\rho\rangle \subset P(a,r,R)$

$$\overset{\text{VIII.7(1)}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2\pi i} \underbrace{\int_{\varphi_\rho} (z-a)^{k-n-1}\,dz}_{\substack{=0 \text{ pro } k-n-1 \neq -1 \\ (tj. \text{ pro } k \neq n)}} \right) = \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{1}{z-a}\,dz = a_n$$

neboť $(z-a)^m$ pro $m \neq -1$ má primitivní fci na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

$\boxed{2}$ zvolme ρ_1, ρ_2, až $r < \rho_1 < \rho_2 < R$.

Dle V10 (b) pak pro $z \in P(a, \rho_1, \rho_2)$ máme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \right)$$

Počítejme: pro ~~pevné~~ $z \in P(a, \rho_1, \rho_2)$ a $w \in \langle \varphi_{\rho_2} \rangle$:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \qquad \left[\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{|z-a|}{\rho_2} < 1 \right]$$

Pro $z \in P(a, \rho_1, \rho_2)$ a $w \in \langle \varphi_{\rho_1} \rangle$:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{(z-a)\left(\frac{w-a}{z-a} - 1\right)} = \frac{-1}{(z-a)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \qquad \left[\left|\frac{w-a}{z-a}\right| = \frac{\rho_1}{|z-a|} < 1 \right]$$

Tedy pro $z \in P(a, \rho_1, \rho_2)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\varphi_{\rho_2}} f(w) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\,dw + \int_{\varphi_{\rho_1}} f(w) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\,dw \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\varphi_{\rho_2}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}}_{\text{řada konv. stejnoměrně na } \langle \varphi_{\rho_2} \rangle}\,dw + \int_{\varphi_{\rho_1}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)\cdot(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}}_{\text{řada konv. stejnoměrně na } \langle \varphi_{\rho_1} \rangle}\,dw \right) =$$

[řady konvergují stejnoměrně dle Weierstrassova kritéria

$$w \in \langle \varphi_{\varrho_2} \rangle \Rightarrow \left| \frac{f(w)\cdot(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right| \leq \max_{w \in \langle \varphi_{\varrho_2} \rangle} |f(w)| \quad \frac{|z-a|^n}{\varrho_2^{n+1}}$$

$$w \in \langle \varphi_{\varrho_1} \rangle \Rightarrow \left| \frac{f(w)\cdot(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \right| \leq \max_{w \in \langle \varphi_{\varrho_1} \rangle} |f(w)| \cdot \frac{\varrho_1^n}{|z-a|^{n+1}} \quad]$$

$$\overset{\text{VIII.7(1)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{\varrho_2}} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\varphi_{\varrho_1}} \frac{f(w)(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\, dw \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{\varrho_2}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right)}_{a_n} \cdot (z-a)^n}_{\text{regulární část L. R.}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{\varrho_1}} f(w)(w-a)^n\, dw \right)}_{a_{-n-1}} (z-a)^{-n-1}}_{\text{hlavní část L. R.}}$$

$\boxed{3}$ Z $\boxed{2}$ plyne, že kdykoli $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$, pak f je na $P(a, \varrho_1, \varrho_2)$ součtem Laurentovy řady. Z $\boxed{1}$ plyne, že všechny tyto řady mají stejné koeficienty, nezávisejí na ϱ_1 a ϱ_2.

Protože sjednocení těchto mezikruží je $P(a, r, R)$, máme jednu L. R., jejímž součtem je f na $P(a, r, R)$.