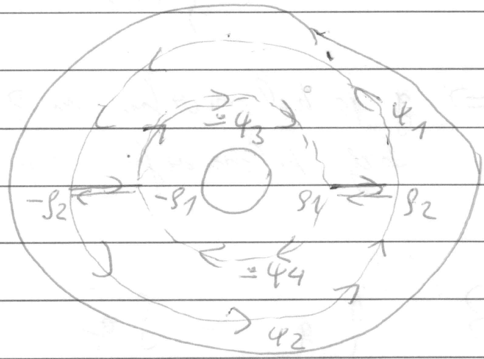
Věta IV. 10 f buď holomorfní v $P(a, r, R)$. Pro $\varrho \in (r, R)$ nechť φ_ϱ značí kladně orientovanou kružnici o středu a a poloměru ϱ.

(a) $\int_{\varphi_\varrho} f$ nezávisí na ϱ

Nechť $\varrho_1 < \varrho_2$



Uvažme následující křivky:

$\varphi_1(t) = a + \varrho_2 e^{it}, \ t \in [0, \pi]$

$\varphi_2(t) = a + \varrho_2 e^{it}, \ t \in [\pi, 2\pi]$

$\varphi_3(t) = a + \varrho_1 e^{it}, \ t \in [0, \pi]$

$\varphi_4(t) = a + \varrho_1 e^{it}, \ t \in [\pi, 2\pi]$

Pak $\eta_1 := \varphi_1 \dot{+} [-\varrho_2, -\varrho_1] \dot{+} (\dot{-}\varphi_3) \dot{+} [\varrho_1, \varrho_2]$

$\eta_2 := \varphi_2 \dot{+} [\varrho_2, \varrho_1] \dot{+} (\dot{-}\varphi_4) \dot{+} [-\varrho_1, -\varrho_2]$

jsou uzavřené cesty a $\int_{\eta_1} f = \int_{\eta_2} f = 0$

To plyne z V9, protože $\langle \eta_1 \rangle \subset P(a, r, R) \setminus \{a + ti;\ t \in (-R, -r)\}$

$\langle \eta_2 \rangle \subset P(a, r, R) \setminus \{a + ti;\ t \in (r, R)\}$

Tedy $0 = \int_{\eta_1} f + \int_{\eta_2} f = \int_{\varphi_1} f + \underbrace{\int_{[-\varrho_2, -\varrho_1]} f} + \int_{\dot{-}\varphi_3} f + \underline{\int_{[\varrho_1 \varrho_2]} f} +$

$+ \int_{\varphi_1} f + \underline{\int_{[\varrho_2 \varrho_1]} f} + \int_{\dot{-}\varphi_4} f + \underbrace{\int_{[-\varrho_1, -\varrho_2]} f} = \int_{\varphi_{\varrho_2}} f - \int_{\varphi_{\varrho_1}} f.$

(b) $z \in P(a, r, R)$, $r < \varrho_1 < |z-a| < \varrho_2 < R$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\varphi_{\varrho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{\varphi_{\varrho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right)$$

$$\left[\quad g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \in P(a,r,R)\setminus\{z\} \\ f'(z), & w = z \end{cases}\right.$$

$\Rightarrow$ g je holomorfní na $P(a,r,R)\setminus\{z\}$ a spojitá na $P(a,r,R)$, tedy holomorfní na $P(a,r,R)$

[Důsledek Věty III.15]

$$\overset{(a)}{\Rightarrow} \int_{\varphi_{\varrho_1}} g = \int_{\varphi_{\varrho_2}} g \quad . \quad \text{Přitom}$$

$$\int_{\varphi_{\varrho_1}} g = \int_{\varphi_{\varrho_1}} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = \int_{\varphi_{\varrho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\cdot\underbrace{\int_{\varphi_{\varrho_1}} \frac{1}{w-z}\,dw}_{=0} =$$

$$= \int_{\varphi_{\varrho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

[$|z-a| > \varrho_1 \Rightarrow \operatorname{ind}_{\varphi_{\varrho_1}} z = 0$]

$$\int_{\varphi_{\varrho_2}} g = \int_{\varphi_{\varrho_2}} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = \int_{\varphi_{\varrho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\underbrace{\int_{\varphi_{\varrho_2}} \frac{1}{w-z}\,dw}_{=2\pi i} =$$

[$|z-a| < \varrho_2 \Rightarrow \operatorname{ind}_{\varphi_{\varrho_2}} z = 1$]

$$= \int_{\varphi_{\varrho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\cdot 2\pi i$$

Protože se oba integrály rovnají, vyjádřením $f(z)$ dostaneme kýžený vzorec.

]