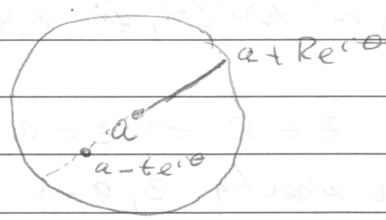
Věticha IV.9 $0 \le r < R \le +\infty$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$G := P(a, r, R) \setminus \{a + te^{i\theta}, t \in (0, \infty)\}$

$\Rightarrow$ $\forall f$ holomorfní na G $\forall \varphi$ uz. ~~křivku~~ cestu v G: $\int_\varphi f = 0$

Dk: $\boxed{1}$ $r = 0$ $\Rightarrow$ G je hvězdovitá. Svědčí o tom libovolný bod $a - te^{i\theta}$, $t \in (0, R)$.

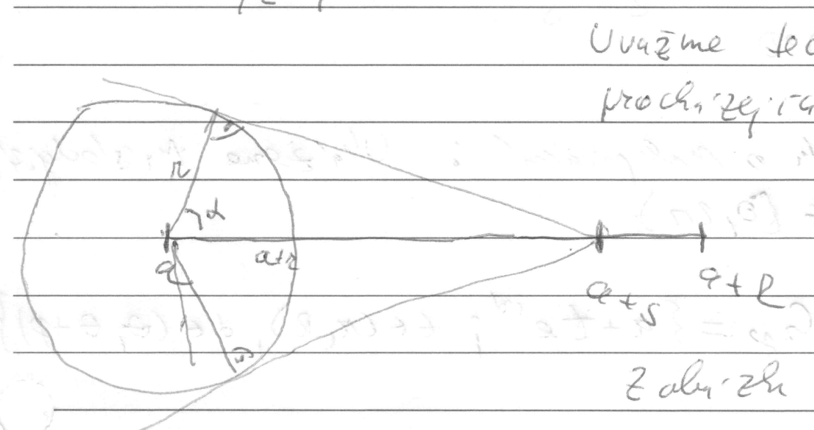


$\boxed{2}$ Nechť $r > 0$. Pak pro každé $R > r$ existuje $\delta \in (0, \pi)$, že množina $\{a + te^{i\alpha};\ t \in (r, R),\ \alpha \in (\beta, \beta + \delta)\}$ je hvězdovitá pro každé $\beta \in \mathbb{R}$

Ukážeme, že funguje libovolné $\delta \in (0, 2 \arccos \frac{r}{R})$:
Zvolme $\delta \in (0, 2\arccos \frac{r}{R})$ a $s \in (r, R)$, ať $\delta < 2\arccos \frac{s}{r}$
Předpokládejme, že $\beta = -\frac{\delta}{2}$ (na otočení nezáleží),

tedy máme množinu $\Omega = \{a + te^{i\alpha}, t \in (r, R), \alpha \in (-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})\}$
Tvrdím, že je hvězdovitá a svědčí o tom bod $z_0 = a + s$:

Uvažme tečny ke kružnici $S(a, r)$ procházející bodem $a + s$



Na obrázku $\cos \alpha = \frac{r}{s}$

tedy

$\alpha = \arccos \frac{r}{s} > \frac{\delta}{2}$

Z obrázku je zjevné, že U je hvězdovitá!

Výpočet bez obrázku: Tvrdím, že $\forall z \in \Omega$: úsečka $a+s, z$ je obsažena v Ω.

- $\{x \in \mathbb{C},\ |x-a| < R\}$ je konvexní množina $\Rightarrow$ úsečka je obsažena v ní.

- $\{x \in \mathbb{C};\ |x-a| > 0\ \&\ \arg(x-a) \in (-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2})\}$ je konvexní množina $\Rightarrow$ úsečka je obsažena v ní.

- zbývá ukázat, že úsečka je obsažena v $\{x \in \mathbb{C},\ |x-a| > r\}$

$z \in \Omega \Rightarrow z = a + te^{i\alpha}$, kde $t \in (r, R)$, $\alpha \in (-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2})$

$w \in$ úsečka $z, a+s$ $\Rightarrow$ ex. $\lambda \in [0,1]$:

$w = \lambda z + (1-\lambda)(a+s) = \lambda(a + te^{i\alpha}) + (1-\lambda)(a+s) =$
$= a + \lambda te^{i\alpha} + (1-\lambda)s$

Pak $|w-a|^2 = |\lambda te^{i\alpha} + (1-\lambda)s|^2 = |\lambda t \cos\alpha + i\lambda t \sin\alpha + (1-\lambda)s|^2$

$= (\lambda t \cos\alpha + (1-\lambda)s)^2 + (\lambda t \sin\alpha)^2 = \lambda^2 t^2 \cos^2\alpha + 2\lambda(1-\lambda)ts\cos\alpha$

$+ (1-\lambda)^2 s^2 + \lambda^2 t^2 \sin^2\alpha = \lambda^2 t^2 + 2\lambda(1-\lambda)st\cos\alpha + (1-\lambda)^2 s^2$

$> \lambda^2 r^2 + 2\lambda(1-\lambda)r^2 + (1-\lambda)^2 r^2 = r^2$

$\uparrow t > r,\ s > r,\ \cos\alpha = \cos|\alpha| > \cos\frac{\sigma}{2} > \frac{r}{s}$

a buď $\lambda > 0$ nebo $1-\lambda > 0$

$\boxed{3}$ Nyní použijeme poznámku o nalepování: Ukážeme následující: Nechť $0 < r < R \le +\infty$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Pro $\gamma \in (0, 2\pi)$ nechť $G_\gamma := \{a + te^{i\alpha};\ t \in (r, R),\ \alpha \in (\theta, \theta+\gamma)\}$

Tvrdím:

$\forall \gamma \in (0, 2\pi]$ $\forall f$ holomorfní na G_γ: f má primitivní funkci na G_γ

Nechť $\gamma_0 = \sup\{\gamma \in (0,2\pi];\ \forall f$ holomorfní na G_γ f má primitivní funkci na $G_\gamma\}$

Nechť $\delta \in (0,\pi)$ je příslušné číslo z $\boxed{2}$

Pak z $\boxed{2}$ plyne, že $\gamma_0 \geq \delta$

Ukážeme, že $\gamma_0 = 2\pi$. Nechť $\gamma_0 < 2\pi$. Zvolme $\gamma \in (0,\gamma_0)$, aby $\gamma_0 < \gamma+\delta \leq 2\pi$

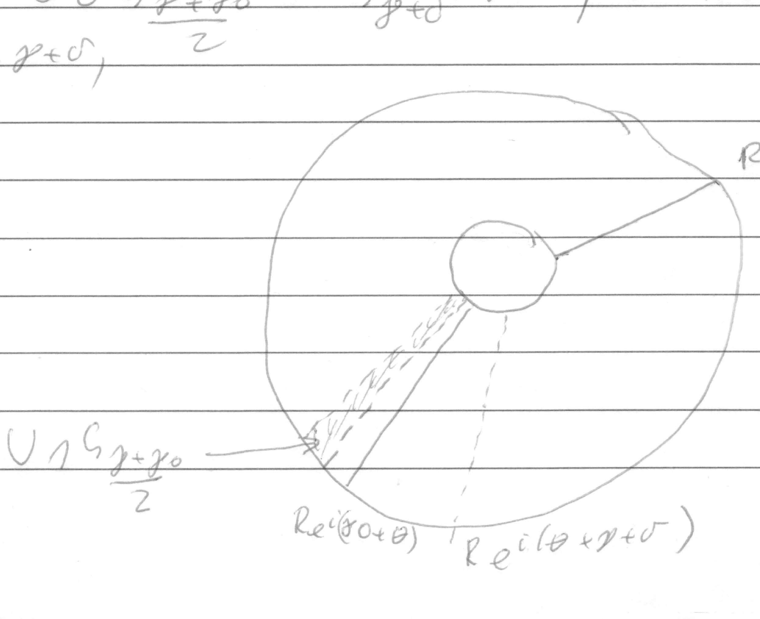
Pak množina $U = \{a + te^{i\alpha},\ t\in(r,R),\ \alpha \in (\theta+\gamma, \theta+\gamma+\delta)\}$ je dle $\boxed{2}$ hvězdicová, a tedy každá holomorfní funkce na U má primitivní funkci dle V III.13

Rovněž každá holomorfní funkce na $G_{\frac{\gamma+\gamma_0}{2}}$ má primitivní funkci (protože $\frac{\gamma+\gamma_0}{2} \in (0,\gamma_0)$)

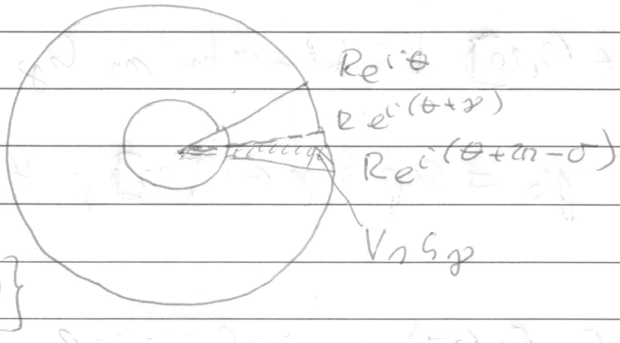
Navíc $U \cap G_{\frac{\gamma+\gamma_0}{2}} = \{a+te^{i\alpha};\ t\in(r,R)\ \&\ \alpha \in (\theta+\gamma, \theta+\frac{\gamma+\gamma_0}{2})\}$

je souvislá. Tedy dle poznámky o nalepování každá holomorfní funkce na $U \cup G_{\frac{\gamma+\gamma_0}{2}} = G_{\gamma+\delta}$ má primitivní funkci. Proto $\gamma_0 \geq \gamma+\delta$, což je spor.

Proto $\gamma_0 = 2\pi$



Nakonec ukážeme, že 2π je dokonce maximum, a to podobně jako předtím:



Zvolme $\gamma \in (2\pi-\delta, 2\pi)$

$$V := \{a + te^{i\alpha};\ t \in (r, R),\ \alpha \in (\theta+2\pi-\delta, \theta+2\pi)\}$$

Pak $V \cap G_\gamma$ je souvislá, $V \cup G_\gamma = G_{2\pi}$ $(= G)$,

a tedy každá f holomorfní na $G = G_{2\pi}$ má primitivní funkci.
To dokončuje důkaz.