Značení: $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$

$\Rightarrow P(a, r, R) = \{ z \in \mathbb{C} ; r < |z-a| < R \}$

Speciální případy: $P(a, 0, R) = P(a, R)$ pro $R \in (0, +\infty)$

$P(a, 0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$

$P(a, r, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{U(a,r)}$ pro $r \in (0, +\infty)$

Důkaz Věty IV.8 Mějme Laurentovu řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad (a_n \in \mathbb{C}, \quad a \in \mathbb{C})$$

Pak: $\boxed{1}$ Existuje $R \in [0, +\infty]$, že regulární část řady, tj. řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{ z \in \mathbb{C}, |z-a| < R \}$ a diverguje pro $|z-a| > R$.

[R je poloměr konvergence této mocninné řady. Tvrzení plyne z vlastností mocninných řad]

$\boxed{2}$ Existuje $r \in [0, +\infty]$, že hlavní část řady, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{ z \in \mathbb{C} ; |z-a| > r \}$ a diverguje pro $|z-a| < r$

[$r := \inf \{ t \in (0, +\infty) ; \sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}| t^{-n} < \infty \}$

$r = +\infty$, pokud je ta množina prázdná

Pak platí, že pro každé $s > r$ je řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{-n}(z-a)^{-n}|$$ stejnoměrně konvergentní na

$$\{z \in \mathbb{C},\ |z-a| \geq s\}$$

Vidíme tedy, že řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C},\ |z-a| > r\}$.

Pokud $|z-a| < r$, pak řada diverguje, protože posloupnost $(a_{-n}(z-a)^{-n})_{n=1}^{\infty}$ je neomezená.

[Sporem: nechť $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_{-n}(z-a)^{-n}| = C < +\infty$

zvolme s, aby $|z-a| < s < r$. Pak

$$|a_{-n}s^{-n}| = |a_{-n}(z-a)^{-n}| \cdot \left|\frac{s^{-n}}{(z-a)^{-n}}\right| \leq C \cdot \left|\frac{z-a}{s}\right|^{n}$$

$\Rightarrow \sum |a_{-n}| s^{-n} < \infty$ (srovnání s geom. řadou),

tedy $s \geq r$, spor.]]

[3] Pokud $r < R$, pak kombinací [1] a [2] dostáváme, že

Laurentova řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $P(a, r, R)$