Lemma 4.7. $a \in \mathbb{C}$, f holomorfní v prstencovém okolí a, $\alpha < \beta$, $\varphi_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$

(i) f holomorfní v $a \Rightarrow \lim\limits_{r \to 0+} \int_{\varphi_r} f = 0$

(ii) f má v a pól násobnosti $1 \Rightarrow \lim\limits_{r \to 0+} \int_{\varphi_r} f = i(\beta - \alpha) \cdot \operatorname{res}_a f$

Dk: (i) f holomorfní v $U(a, R)$, $r < R$

$\Downarrow$ F buď primitivní funkce k f v $U(a,R)$ (viz V III.13)

$$\int_{\varphi_r} f \underset{\text{Věta III.3}}{=} F(a + re^{i\beta}) - F(a + re^{i\alpha}) \xrightarrow{r \to 0+} F(a) - F(a) = 0$$

(ii) f má v a pól násobnosti $1 \Rightarrow f(z) = \dfrac{c}{z-a} + g(z)$,

kde g je holomorfní v bodě a

Pak
$$\int_{\varphi_r} f = \int_{\varphi_r} \frac{c}{z-a} + \underbrace{\int_{\varphi_r} g}_{\xrightarrow{r \to 0} 0 \text{ dle (i)}}$$

$$\int_{\varphi_r} \frac{c}{z-a} = c \cdot \int_\alpha^\beta \frac{1}{a + re^{it} - a} \cdot (re^{it} \cdot i)\, dt =$$

$$= c \cdot \int_\alpha^\beta i \, dt = i(\beta - \alpha) \cdot c \underset{\operatorname{res}_a f = c}{=} i(\beta - \alpha) \operatorname{res}_a f$$

Pozn: f má v bodě pól vyšší násobnosti

$\Rightarrow$ limita je rovna ∞ až na „speciální případy"

Přesněji: f nechť má v bodě a pól násobnosti $p > 1$ a $c_{-1}, \dots, c_{-p}$ jsou koeficienty z V2(2).

kde g je holomorfní v okolí a

$$\int_{\varphi_r} f = \int_{\varphi_r} \left(\frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z) \right) dz =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=2}^{p} c_{-k} \int_{\varphi_r} \frac{1}{(z-a)^k}}\ + \underbrace{\int_{\varphi_r} \frac{c_{-1}}{z-a}}_{\downarrow (ii)} + \underbrace{\int_{\varphi_r} g(z) dz}_{\to 0 \text{ dle (i)}}$$

$$c_{-1} \cdot i(\beta - \alpha)$$

$\left(\frac{-1}{(k-1)(z-a)^{k-1}} \right.$ je primitivní funkce

$$\sum_{k=2}^{p} c_{-k} \cdot \left(\frac{-1}{(k-1)(re^{i\beta})^{k-1}} + \frac{1}{(k-1)(re^{i\alpha})^{k-1}} \right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{p} \frac{c_{-k}}{(k-1) r^{k-1}} \left(e^{-i\alpha(k-1)} - e^{-i\beta(k-1)} \right)$$

Pokud $\forall k \in \{2 \dots p\}$ je $c_{-k} e^{i\alpha(k-1)} = c_{-k} e^{-\beta(k-1)}$, pak je tato suma 0, a tedy limita je stejná jako v případě násobnosti 1

Pokud aspoň pro jedno k to neplatí, limita je ∞

Nem. Č.: Nechť $c_{-p}, \dots, c_{-2} \in \mathbb{R}$,

$$\text{Pak} \quad \mathrm{Re} \left(\sum_{k=2}^{p} c_{-k} \int_{\varphi_r} \frac{1}{(z-a)^k} \right) = \sum_{k=2}^{p} \frac{c_{-k}}{(k-1) r^{k-1}} \left(\cos(\alpha(k-1)) - \cos(\beta(k-1)) \right)$$

$$\mathrm{Im} \left(\text{—} '' \text{—} \right) = \sum_{k=2}^{p} \frac{c_{-k}}{(k-1) r^{k-1}} \left(\sin(\beta(k-1)) - \sin(\alpha(k-1)) \right)$$

Tedy, aby vyšla konečná limita, stačí v prvním případě $c_{-k} \cos(k-1)\alpha = c_{-k} \cos(k-1)\beta$ a v druhém případě $c_{-k} \sin(k-1)\alpha = c_{-k} \sin(k-1)\beta$