Druhá Větičky I.1

$M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

(1) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = z \iff \lim\limits_{x \to a+} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} z$ & $\lim\limits_{x \to a+} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} z$

[$\Rightarrow$: $|\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} z| = |\operatorname{Re}(f(x) - z)| \leq |f(x) - z|$

podobně pro Im

$\Leftarrow$ $|f(x) - z| = \sqrt{(\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} f(x) - \operatorname{Im} z)^2}$]

(2) f je spojitá v a zprava $\iff$ Re f i Im f jsou spojité v bodě a zprava

[Plyne z (1) a z toho, že f je spojitá v bodě a zprava $\iff \lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$]

Pozn: Zřejmé analogie platí i „zleva" a „oboustranně" pro (1) i (2)

(3) $f'(x)$ existuje $\iff$ ex. vlastní derivace $(\operatorname{Re} f)'(x)$, $(\operatorname{Im} f)'(x)$. ~~Re~~

Pak $f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + (\operatorname{Im} f)'(x)$

[Plyne z oboustranné verze (1), protože

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

a $\operatorname{Re} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = \dfrac{\operatorname{Re} f(y) - \operatorname{Re} f(x)}{y - x}$, podobně pro Im]

(4) $F: (a,b) \to \mathbb{C}$ je primitivní funkce k f na (a,b)

$\iff$ $\operatorname{Re} F$ je primitivní funkce k $\operatorname{Re} f$ na (a,b)

& $\operatorname{Im} F$ je primitivní funkce k $\operatorname{Im} f$ na (a,b)

[plyne z definice a z (3)]

<u>Dk Věty I.2</u> $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ spojitá

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f| \le (b-a) \cdot \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

• druhá nerovnost plyne z vlastností integrálu v $\mathbb{R}$

$$\left(|f| \le \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad \text{na } [a,b] \right)$$

• první nerovnost:

$$w := \int_a^b f$$

$$|w|^2 = w \cdot \overline{w} = \left(\int_a^b f \right) \cdot \overline{w} = \int_a^b (f \cdot \overline{w}) = \operatorname{Re} \int_a^b f\overline{w} =$$

Levá strana je reálné číslo

$$= \int_a^b \operatorname{Re}(f\overline{w}) \le \int_a^b |f\overline{w}| = |\overline{w}| \int_a^b |f| = |w| \cdot \int_a^b |f|$$

definice | monotonie integrálu

Pokud $w \neq 0$, vydělíme nerovnost $|w|$, dostaneme

$$|w| \le \int_a^b |f| \text{, což je ~~[illegible]~~ dokazovaná nerovnost.}$$

Je-li $w = 0$, je nerovnost zřejmá.