# IV.1 Rozšíření $\mathbb{C}$ o $\infty$, Riemannova sféra

**Definice.** Označme $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pro $\varepsilon > 0$ položme

$$U(\infty, \varepsilon) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C}, |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}.$$

Nechť $f$ je funkce definovaná na podmnožině $\overline{\mathbb{C}}$ s hodnotami v $\overline{\mathbb{C}}$. Řekneme, že $f$ **má v bodě** $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ **limitu** $w \in \overline{\mathbb{C}}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé $z \in U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ platí $f(z) \in U(w, \varepsilon)$. Má-li $f$ v bodě $z_0$ limitu $f(z_0)$, říkáme, že $f$ je **spojitá v** $z_0$.

Na $\overline{\mathbb{C}}$ dále rozšíříme operace následovně:

$$\begin{aligned} z + \infty = \infty + z = \infty - z = z - \infty &= \infty && \text{pro } z \in \mathbb{C}, \\ z \cdot \infty = \infty \cdot z = \frac{z}{0} &= \infty && \text{pro } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \\ \frac{\infty}{z} = \infty \qquad \text{a} \qquad \frac{z}{\infty} &= 0 && \text{pro } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Nedefinované jsou následující výrazy:

$$\infty + \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

**Poznámka.** Operace jsou rozšířeny tak, aby platila věta o aritmetice limit s dodatkem „má-li pravá strana smysl“.

**Věta 1.** *Označme $\mathbb{S}_2$ jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^3$, tj.*

$$\mathbb{S}_2 = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}.$$

*Dále definujme zobrazení $\chi : \mathbb{S}_2 \to \overline{\mathbb{C}}$ předpisem*

$$\chi(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \infty, & (\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 1), \\ \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

*Pak $\chi$ je prosté zobrazení $\mathbb{S}_2$ na $\overline{\mathbb{C}}$ a $\chi|_{\mathbb{S}_2 \setminus \{(0,0,1)\}}$ je homeomorfismus $\mathbb{S}_2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ na $\mathbb{C}$.*

*Definujme dále metriku $\rho^*$ na $\overline{\mathbb{C}}$ předpisem*

$$\rho^*(z, w) = \rho_e(\chi^{-1}(z), \chi^{-1}(w)), \qquad z, w \in \overline{\mathbb{C}},$$

*kde $\rho_e$ je eukleidovská metrika na $\mathbb{R}^3$. Pak limita a spojitost funkcí z $\overline{\mathbb{C}}$ do $\overline{\mathbb{C}}$ definovaná výše se shoduje s limitou a spojitostí v metrice $\rho^*$.*

**Poznámka.** Prostor $\overline{\mathbb{C}}$ se často značí $\mathbb{S}$ a nazývá se **Riemannova sféra**. Zobrazení $\chi$ se nazývá **stereografická projekce**.

## IV.2 Izolované singularity holomorfních funkcí

**Definice.** Nechť $a \in \overline{\mathbb{C}}$ a $r > 0$. **Prstencovým okolím bodu $a$ o poloměru $r$** rozumíme množinu $P(a,r) = U(a,r) \setminus \{a\}$.

**Věta 2** (Casorati-Weierstrassova). *Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a funkce $f$ je holomorfní na $P(a,r)$. Pak nastává právě jedna z následujících možností:*

(1) *Existuje takové $\rho \in (0,r)$, že $f$ je omezená na $P(a,\rho)$. Pak existuje vlastní $\lim_{z\to a} f(z)$. Dodefinujeme-li funkci $f$ v bodě $a$ hodnotou této limity, dostaneme funkci holomorfní na $U(a,r)$. (Pak říkáme, že $f$ má v bodě $a$* **odstranitelnou singularitu**.*)*

(2) *$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$. Pak existuje právě jedno $p \in \mathbb{N}$, pro které existuje vlastní nenulová $\lim_{z\to a}(z-a)^p f(z)$. Navíc existují jednoznačně určená čísla $a_{-p}, a_{-(p-1)}, \dots, a_{-1} \in \mathbb{C}$, $a_{-p} \neq 0$, že funkce*

$$f - \frac{a_{-1}}{z-a} - \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} - \cdots - \frac{a_{-p}}{(z-a)^p}$$

*má v bodě $a$ odstranitelnou singularitu. (V tomto případě říkáme, že $f$ má v bodě $a$* **pól násobnosti** *$p$.)*

(3) *$\lim_{z\to a} f(z)$ neexistuje. Pak pro každé $\rho \in (0,r)$ je $f(P(a,\rho))$ hustá v $\mathbb{C}$. (Říkáme, že $f$ má v bodě $a$* **podstatnou singularitu**.*)*

**Poznámka.** *Platí dokonce* **Velká Picardova věta***: Má-li $f$ v bodě $z_0$ podstatnou singularitu, pak v každém prstencovém okolí $z_0$ nabývá $f$ všech hodnot z $\mathbb{C}$ s výjimkou nejvýše jedné.*

**Definice.** Nechť $f$ je funkce definovaná na $U(\infty,r)$ pro nějaké $r > 0$. Řekneme, že

(i) $f$ je **holomorfní v bodě $\infty$**,
(ii) $f$ **má v bodě $\infty$ kořen násobnosti** $p$,

pokud příslušnou vlastnost má funkce $g(z) = f(\frac{1}{z})$ v bodě 0.

Je-li $f$ holomorfní na $P(\infty,r)$ pro nějaké $r > 0$, pak říkáme, že $f$ **má v bodě $\infty$ odstranitelnou singularitu** (**pól násobnosti** $p$, **podstatnou singularitu**), jestliže příslušný typ singularity má funkce $g(z) = f(\frac{1}{z})$ v bodě 0.