

### III.4 Lokální Cauchyova věta a její důsledky

**Definice.** Necht  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . **Trojúhelníkem**  $\triangle abc$  rozumíme konvexní obal množiny  $\{a, b, c\}$ , tj. nejmenší konvexní množinu obsahující body  $a, b, c$ . **Obvodem trojúhelníka**  $\triangle abc$  rozumíme křivku

$$\partial\triangle abc = [a, b] \dot{+} [b, c] \dot{+} [c, a].$$

**Věta 12** (Cauchy-Goursatova věta pro trojúhelník). Necht  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená množina a  $f$  je holomorfní funkce na  $\Omega$ . Pak

$$\int_{\partial\triangle abc} f = 0 \text{ pro každý trojúhelník } \triangle abc \text{ obsažený v } \Omega.$$

**Důsledek.** Necht  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená množina,  $p \in \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  je funkce spojitá na  $\Omega$  a holomorfní na  $\Omega \setminus \{p\}$ . Pak

$$\int_{\partial\triangle abc} f = 0 \text{ pro každý trojúhelník } \triangle abc \text{ obsažený v } \Omega.$$

**Definice.** Množina  $M \subset \mathbb{C}$  se nazývá **hvězdovitá**, pokud existuje takové  $a \in M$ , že pro každé  $b \in M$  je úsečka spojující body  $a, b$  celá obsažena v  $M$ .

**Věta 13** (Cauchyova věta pro hvězdovitou množinu). Necht  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená hvězdovitá množina,  $p \in \Omega$  a  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá funkce, která je holomorfní na  $\Omega \setminus \{p\}$ . Pak  $f$  má na  $\Omega$  primitivní funkci, a tedy  $\int_{\varphi} f = 0$  pro každou uzavřenou křivku  $\varphi$  v  $\Omega$ .

**Poznámka** (o nalepování). Necht  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  jsou otevřené podmnožiny  $\mathbb{C}$ , pro které  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  je souvislá množina. Necht funkce  $f$  má primitivní funkci v  $\Omega_1$  i v  $\Omega_2$ . Pak  $f$  má primitivní funkci v  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ .

**Věta 14** (Cauchyův vzorec pro kruh). Necht  $f$  je holomorfní na uzavřeném kruhu o středu  $a \in \mathbb{C}$  a poloměru  $r > 0$  (tj. na  $\overline{U(a, r)}$ ) a  $\varphi$  je kladně orientovaná kružnice o středu  $a$  a poloměru  $r$ . Pak pro každé  $z \in U(a, r)$  platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

**Důsledek** (vlastnost průměru pro holomorfní funkce). Necht  $f$  je holomorfní na  $\overline{U(a, r)}$ , kde  $a \in \mathbb{C}$  a  $r > 0$ . Pak platí

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

**Věta 15** (Cauchyův vzorec pro vyšší derivace). Necht  $f$  je holomorfní na  $\overline{U(a, r)}$  (kde  $a \in \mathbb{C}$  a  $r > 0$ ). Pak  $f$  má na  $U(a, r)$  derivace všech řádů a pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a  $z \in U(a, r)$  platí

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$$

kde  $\varphi$  je kladně orientovaná kružnice o středu  $a$  a poloměru  $r$ .

**Důsledek.** Je-li  $f$  holomorfní na množině  $M \subset \mathbb{C}$ , je i  $f'$  holomorfní na  $M$ .

**Důsledek.** Necht  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená množina,  $p \in \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  je funkce spojitá na  $\Omega$  a holomorfní na  $\Omega \setminus \{p\}$ . Pak  $f$  je holomorfní na  $\Omega$ .

**Věta 16** (vyjádření mocninnou řadou). Necht  $f$  je funkce holomorfní na  $U(a, r)$ , kde  $a \in \mathbb{C}$  a  $r > 0$ . Pak je  $f$  na  $U(a, r)$  součtem mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

o středu  $a$ , která na  $U(a, r)$  konverguje. Koeficienty této řady jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(symbolem  $f^{(0)}$  rozumíme  $f$ ).

**Věta 17** (Cauchyovy odhady). Necht'  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  na  $U(a, R)$ . Pro  $r \in (0, R)$  označme

$$M_r = \max\{|f(z)| : |z-a| = r\}.$$

Pak pro  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  platí  $|c_n| \leq \frac{M_r}{r^n}$ .

**Věta 18** (Liouvilleova věta). Každá omezená celá funkce je konstantní.

**Poznámka.** Platí obecněji: Necht'  $f$  je celá funkce a  $n \in \mathbb{N}$  takové, že  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$ . Pak  $f$  je polynom stupně menšího než  $n$ .

( $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = w$  znamená: Pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje takové  $R > 0$ , e pro každé  $|z| > R$  platí  $|g(z) - w| < \varepsilon$ .)

**Věta 19** (základní věta algebry). Každý polynom stupně alespoň 1 s komplexními koeficienty má aspoň jeden kořen v  $\mathbb{C}$ .

**Důsledek** (rozklad na kořenové činitele). Necht'

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

je polynom s komplexními koeficienty, přičemž  $n \geq 1$  a  $a_n \neq 0$ . Pak existují komplexní čísla  $w_1, \dots, w_n$  taková, že pro každé  $z \in \mathbb{C}$  platí

$$P(z) = a_n(z-w_1)(z-w_2)\dots(z-w_n).$$

Čísla  $w_1, \dots, w_n$  jsou určena jednoznačně až na pořadí.

**Věta 20** (o kořenech holomorfní funkce). Necht'  $f$  je funkce holomorfní na  $U(a, r)$ , kde  $a \in \mathbb{C}$  a  $r > 0$ . Předpokládejme, že  $f(a) = 0$  a  $f$  není konstantní nulová funkce na  $U(a, r)$ . Pak existuje právě jedno  $p \in \mathbb{N}$  a funkce  $g$  holomorfní na  $U(a, r)$  taková, že  $g(a) \neq 0$  a

$$f(z) = (z-a)^p g(z) \text{ pro } z \in U(a, r).$$

**Definice.** Je-li  $f$ ,  $a$  a  $p$  jako ve Větě 20, říkáme, že bod  $a$  je  $p$ -násobný kořen funkce  $f$ .

**Definice.** Necht'  $M \subset \mathbb{C}$  je množina a  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Říkáme, že bod  $z_0$  je **hromadným bodem množiny**  $M$ , jestliže každé okolí bodu  $z_0$  obsahuje nějaký bod množiny  $M$  různý od  $z_0$ . Je-li navíc  $\Omega \subset \mathbb{C}$  množina obsahující  $M$ , říkáme, že  $M$  je **izolovaná v  $\Omega$** , jestliže nemá v  $\Omega$  žádný hromadný bod.

**Věta 21** (o jednoznačnosti). Necht'  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je oblast a  $f, g$  jsou funkce holomorfní na  $\Omega$ . Jestliže množina

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v  $\Omega$  (tj. není izolovaná v  $\Omega$ ), pak  $f = g$  na  $\Omega$ .

**Důsledek.** Jsou-li  $f, g$  dvě celé funkce, které se shodují na  $\mathbb{R}$ , pak  $f = g$  na  $\mathbb{C}$ .

**Věta 22** (princip maxima modulu). Necht'  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je oblast a  $f$  je nekonstantní holomorfní funkce na  $\Omega$ . Pak  $|f|$  nenabývá nikde v  $\Omega$  lokálního maxima.

**Důsledek.** Necht'  $\Omega$  je omezená oblast a  $f$  je funkce spojitá na  $\overline{\Omega}$ , která je holomorfní na  $\Omega$ . Pak  $|f|$  nabývá svého maxima na  $\overline{\Omega}$  na hranici. Speciálním případem je  $\Omega = U(a, r)$ .

**Věta 23** (Weierstrassova věta). Necht'  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená, funkce  $f_n$  jsou holomorfní v  $\Omega$  a konvergují k funkci  $f$  lokálně stejnoměrně v  $\Omega$ . Pak  $f$  je holomorfní v  $\Omega$  a pro každé  $p \in \mathbb{N}$  funkce  $f_n^{(p)}$  konvergují k  $f^{(p)}$  lokálně stejnoměrně v  $\Omega$ .

**Věta 24** (Moreraova věta). Necht'  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená a  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá funkce taková, že

$$\int_{\partial \Delta abc} f = 0 \text{ pro každý trojúhelník } \Delta abc \text{ obsažený v } \Omega.$$

Pak  $f$  je holomorfní na  $\Omega$ .

**Poznámka.** Věta 24 platí i v případě, že místo trojúhelníků uvažujeme obdélníky, jejichž strany jsou rovnoběžné s osami.