

### III.3 Spojité větve logaritmu, index bodu ke křivce

**Věta 8.** Necht'  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  je křivka a  $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá funkce, která na  $\langle \varphi \rangle$  nenabývá hodnoty 0. Pak existuje spojitá funkce  $L : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  taková, že  $f(\varphi(t)) = e^{L(t)}$  pro  $t \in [a, b]$ . Jsou-li  $L_1$  a  $L_2$  dvě takové funkce, pak existuje  $k \in \mathbb{Z}$ , že  $L_1(t) - L_2(t) = 2k\pi i$  pro  $t \in [a, b]$ .

Je-li navíc  $\varphi$  cesta,  $f$  je holomorfní na  $\langle \varphi \rangle$  a  $f'$  spojitá na  $\langle \varphi \rangle$ , lze volit

$$L(t) = \log(f(\varphi(a))) + \int_a^t \frac{f'(\varphi(s))}{f(\varphi(s))} \varphi'(s) ds.$$

**Definice.** Necht'  $\varphi$ ,  $f$  a  $L$  jsou jako ve Větě 8. Pak **přírůstkem logaritmu funkce  $f$  podél křivky  $\varphi$**  rozumíme číslo

$$\Delta_\varphi \log(f) = L(b) - L(a).$$

**Větička 9.** Je-li  $\varphi$  cesta,  $f$  holomorfní na  $\langle \varphi \rangle$  a  $f'$  spojitá na  $\langle \varphi \rangle$ , pak

$$\Delta_\varphi \log(f) = \int_\varphi \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

**Poznámka.** Později dokážeme, že je-li  $f$  holomorfní, je  $f'$  automaticky spojitá.

**Definice.** Necht'  $\varphi$  je uzavřená cesta a  $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ . Pak **index bodu  $a$  vzhledem ke křivce  $\varphi$**  je definován vzorcem

$$\text{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z - a} dz.$$

**Poznámka.** Je-li  $\varphi$  uzavřená cesta a  $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ , pak  $\text{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i} \Delta_\varphi \log(z - a)$ .

**Definice.** Necht'  $M \subset \mathbb{C}$  je množina. Množinu  $A \subset M$  nazveme **komponentou množiny  $M$** , je-li maximální souvislou podmnožinou  $M$  (tj. je-li  $A$  souvislá a přitom každá množina  $B$  splňující  $A \subsetneq B \subset M$  je nespojivá).

**Větička 10.** Necht'  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená. Pak každá její komponenta je otevřená množina.

**Věta 11** (vlastnosti funkce  $\text{ind}_\varphi a$ ). Necht'  $\varphi$  je uzavřená cesta. Pro  $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$  položme  $\iota(a) = \text{ind}_\varphi a$ .

- (1) Funkce  $\iota$  nabývá jen celočíselných hodnot.
- (2) Funkce  $\iota$  je konstantní na každé komponentě množiny  $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ .
- (3) Funkce  $\iota$  je rovna nule na neomezené komponentě množiny  $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ .

**Poznámky.** (1) Je-li  $\varphi$  kladně orientovaná kružnice o středu  $a$  a poloměru  $r$ , pak

$$\operatorname{ind}_{\varphi} z = \begin{cases} 1 & \text{pro } z \in U(a, r), \\ 0, & \text{je-li } |z - a| > r. \end{cases}$$

(2) Platí **Jordanova věta**: Je-li  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uzavřená cesta taková, že  $\varphi$  je prostá na  $[a, b)$ , pak množina  $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$  má právě dvě komponenty – jednu neomezenou (na ní je index roven nule) a jednu omezenou (na ní je index roven buď 1 nebo  $-1$ ).

(3) Platí následující **propichovací věta**: Nechť  $\varphi$  je uzavřená cesta,  $a, b \in \mathbb{C}$  taková, že  $b - a > 0$ , úsečka spojující body  $a, b$  protíná  $\langle \varphi \rangle$  v jediném bodě  $z_0$ , ten je různý od  $a, b$ , existuje jediné  $t_0$ , pro které  $\varphi(t_0) = z_0$ , a  $\operatorname{Im} \varphi'(t_0) \neq 0$ . Pak

$$\operatorname{ind}_{\varphi} a - \operatorname{ind}_{\varphi} b = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \varphi'(t_0).$$