

II.1 Mocninné řady - připomenutí

Definice. Necht' $a \in \mathbb{C}$ a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Nekonečnou řadu funkcí tvaru

$$(M) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

nazýváme **mocninnou řadou o středu a** .

Poloměrem konvergence řady (M) rozumíme $R \in [0, +\infty]$ definované vzorcem

$$R = \sup\{r \in [0, +\infty); \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \text{ konverguje}\}.$$

Množinu

$$U(a, R) = \{z \in \mathbb{C}: |z - a| < R\},$$

pak nazýváme **kruhem konvergence** řady (M).

Věta 1.

- (1) Každá mocninná řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na svém kruhu konvergence.
- (2) Položme $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Pak poloměr konvergence řady (M) je

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & L > 0, \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$$

- (3) Existuje-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$, rovná se číslu L z předchozího bodu.
- (4) Mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - a)^{n-1}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - a)^{n+1}$ mají stejný poloměr konvergence jako řada (M).

Věta 2 (derivace a integrace mocninné řady). Uvažujme řadu (M) a necht' $R > 0$ její poloměr konvergence. Definujme funkci $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$, $z \in U(a, R)$. Pak platí:

- (i) Funkce f je spojitá na $U(a, R)$.
- (ii) Funkce f je holomorfní na $U(a, R)$ a platí
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - a)^{n-1}, \quad z \in U(a, R).$$
- (iii) Funkce $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - a)^{n+1}$ je holomorfní na $U(a, R)$ a pro každé $z \in U(a, R)$ platí $F'(z) = f(z)$.

II.2 Elementární celé funkce

Definice. Pro $z \in \mathbb{C}$ definujme

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Funkci \exp nazýváme **exponenciální funkce**, krátce **exponenciála**. Dále označme $e = \exp(1)$.

Věta 3 (vlastnosti exponenciální funkce). Platí:

- (E1) Funkce \exp je definovaná na \mathbb{C} , je na \mathbb{C} holomorfní a platí $\exp'(z) = \exp(z)$ pro $z \in \mathbb{C}$.
- (E2) $\exp(0) = 1$.
- (E3) $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ pro $z, w \in \mathbb{C}$.
- (E4) $\exp(z) \neq 0$ pro $z \in \mathbb{C}$.
- (E5) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ pro $z \in \mathbb{C}$.
- (E6) Funkce \exp zobrazuje \mathbb{R} na interval $(0, +\infty)$, je na \mathbb{R} rostoucí a (ryze) konvexní.
- (E7) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$ pro $z \in \mathbb{C}$.

Definice. Pro $z \in \mathbb{C}$ položme

- $\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$ (funkce **kosinus**);
- $\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$ (funkce **sinus**);
- $\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$ (funkce **hyperbolický kosinus**);
- $\sinh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$ (funkce **hyperbolický sinus**);

Věta 4 (vlastnosti goniometrických a hyperbolických funkcí).

- (1) Funkce \cos , \sin , \cosh , \sinh jsou definovány na \mathbb{C} , přičemž funkce \cos a \cosh jsou sudé a funkce \sin a \sinh jsou liché.
- (2) $\cos(0) = \cosh(0) = 1$, $\sin(0) = \sinh(0) = 0$.
- (3) Funkce \cos , \sin , \cosh , \sinh jsou holomorfní na \mathbb{C} a pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\begin{aligned} \cos'(z) &= -\sin(z) & \cosh'(z) &= \sinh(z) \\ \sin'(z) &= \cos(z) & \sinh'(z) &= \cosh(z) \end{aligned}$$

- (4) Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\cosh(iz) = \cos(z), \quad \sinh(iz) = i \sin(z), \quad \exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z).$$

- (5) Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} & \cosh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sinh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

- (6) Funkce \cos , \sin , \cosh a \sinh nabývají na \mathbb{R} reálných hodnot.
- (7) Pro každá $z, w \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) & \cosh(z+w) &= \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w) \\ \sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) & \sinh(z+w) &= \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w) \end{aligned}$$

- (8) Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \quad \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1.$$

- (9) $\cos(2) < 0$, a tedy můžeme definovat

$$\pi = 2 \cdot \min\{x > 0 : \cos(x) = 0\}.$$

Pak platí $\pi < 4$.

- (10) Na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je funkce \sin rostoucí a konkávní, funkce \cos klesající a konkávní; $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
- (11) $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$.
- (12) Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $\cos(z + \pi) = -\cos(z)$, $\sin(z + \pi) = -\sin(z)$.
- (13) Funkce \sin a \cos jsou periodické s periodou 2π ; funkce \cosh , \sinh a \exp jsou periodické s periodou $2\pi i$.
- (14) Necht' $z, w \in \mathbb{C}$. Pak $\exp(z) = \exp(w)$, právě když $z - w$ je celočíselný násobek $2\pi i$.
- (15) Necht' $z \in \mathbb{C}$. Pak $\sin(z) = 0$, právě když z je celočíselný násobek π .
- (16) Funkce \exp zobrazuje \mathbb{C} na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.