

III.3 Lokální Cauchyova věta a její důsledky

Definice. Necht' $a, b, c \in \mathbb{C}$. **Trojúhelníkem** $\triangle abc$ rozumíme konvexní obal množiny $\{a, b, c\}$, tj. nejmenší konvexní množinu obsahující body a, b, c . **Obvodem trojúhelníka** $\triangle abc$ rozumíme křivku

$$\partial\triangle abc = [a, b] \dot{+} [b, c] \dot{+} [c, a].$$

Věta 11 (Cauchyova věta pro trojúhelník). Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $p \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Pak

$$\int_{\partial\triangle abc} f = 0 \text{ pro každý trojúhelník } \triangle abc \text{ obsažený v } \Omega$$

Definice. Množina $M \subset \mathbb{C}$ se nazývá **hvězdovitá**, pokud existuje takové $a \in M$, že pro každé $b \in M$ je úsečka spojující body a, b celá obsažena v M .

Věta 12 (Cauchyova věta pro hvězdovitou množinu). Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená hvězdovitá množina, $p \in \Omega$ a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce, která je holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Pak f má na Ω primitivní funkci, a tedy $\int_{\varphi} f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v Ω .

Poznámka (o nalepování). Necht' Ω_1 a Ω_2 jsou otevřené podmnožiny \mathbb{C} , pro které $\Omega_1 \cap \Omega_2$ je souvislá množina. Necht' funkce f má primitivní funkci v Ω_1 i v Ω_2 . Pak f má primitivní funkci v $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Věta 13 (Cauchyův vzorec pro kruh). Necht' f je holomorfní na uzavřeném kruhu o středu $a \in \mathbb{C}$ a poloměru $r > 0$ (tj. na $\overline{U(a, r)}$) a φ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r . Pak pro každé $z \in U(a, r)$ platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Důsledek (vlastnost průměru pro holomorfní funkce). Necht' f je holomorfní na $\overline{U(a, r)}$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Pak platí

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Věta 14 (Cauchyův vzorec pro vyšší derivace). Necht' f je holomorfní na $\overline{U(a, r)}$ (kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$). Pak f má na $U(a, r)$ derivace všech řádů a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $z \in U(a, r)$ platí

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$$

kde φ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r .

Důsledek. Je-li f holomorfní na množině $M \subset \mathbb{C}$, je i f' holomorfní na M .

Věta 15 (vyjádření mocninnou řadou). Necht' f je funkce holomorfní na $U(a, r)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Pak je f na $U(a, r)$ součtem mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

o středu a , která na $U(a, r)$ konverguje. Koeficienty této řady jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(symbolem $f^{(0)}$ rozumíme f).

Věta 16 (Cauchyovy odhady). Necht' $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ na $U(a, R)$. Pro $r \in (0, R)$ označme

$$M_r = \max\{|f(z)| : |z - a| = r\}.$$

Pak pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $|c_n| \leq \frac{M_r}{r^n}$.

Věta 17 (Liouvilleova věta). Každá omezená celá funkce je konstantní.

Poznámka. Platí obecněji: Nechť f je celá funkce a $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$. Pak f je polynom stupně menšího než n .

($\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = w$ znamená: Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $R > 0$, že pro každé $|z| > R$ platí $|g(z) - w| < \varepsilon$.)

Věta 18 (základní věta algebry). Každý polynom stupně alespoň 1 s komplexními koeficienty má aspoň jeden kořen v \mathbb{C} .

Důsledek (rozklad na kořenové činitele). Nechť

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

je polynom s komplexními koeficienty, přičemž $n \geq 1$ a $a_n \neq 0$. Pak existují komplexní čísla w_1, \dots, w_n taková, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$P(z) = a_n (z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n).$$

Čísla w_1, \dots, w_n jsou určena jednoznačně až na pořadí.

Věta 19. Nechť f je funkce holomorfní na $U(a, r)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Předpokládejme, že $f(a) = 0$ a f není konstantní nulová funkce na $U(a, r)$. Pak existuje právě jedno $p \in \mathbb{N}$ a funkce g holomorfní na $U(a, r)$ taková, že $g(a) \neq 0$ a

$$f(z) = (z - a)^p g(z) \text{ pro } z \in U(a, r).$$

Definice. Je-li f , a a p jako ve Větě 16, říkáme, že bod a je p -násobný kořen funkce f .

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina a $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že bod z_0 je **hromadným bodem množiny** M , jestliže každé okolí bodu z_0 obsahuje nějaký bod množiny M různý od z_0 . Je-li navíc $\Omega \subset \mathbb{C}$ množina obsahující M , říkáme, že M je **izolovaná v Ω** , jestliže nemá v Ω žádný hromadný bod.

Věta 20 (věta o jednoznačnosti). Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f, g jsou funkce holomorfní na Ω . Jestliže množina

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v Ω (tj. není izolovaná v Ω), pak $f = g$ na Ω .

Důsledek. Jsou-li f, g dvě celé funkce, které se shodují na \mathbb{R} , pak $f = g$ na \mathbb{C} .

Věta 21 (princip maxima modulu). Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je nekonstantní holomorfní funkce na Ω . Pak $|f|$ nenabývá nikde v Ω lokálního maxima.

Důsledek. Nechť Ω je omezená oblast a f je funkce spojitá na $\overline{\Omega}$, která je holomorfní na Ω . Pak $|f|$ nabývá svého maxima na $\overline{\Omega}$ na hranici. Speciálním případem je $\Omega = U(a, r)$.

Věta 22 (Weierstrassova věta). Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, funkce f_n jsou holomorfní v Ω a konvergují k funkci f lokálně stejnoměrně v Ω . Pak f je holomorfní v Ω a pro každé $p \in \mathbb{N}$ funkce $f_n^{(p)}$ konvergují k $f^{(p)}$ lokálně stejnoměrně v Ω .

Věta 23 (Moreroва věta). Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce taková, že

$$\int_{\partial \Delta_{abc}} f = 0 \text{ pro každý trojúhelník } \Delta_{abc} \text{ obsažený v } \Omega.$$

Pak f je holomorfní na Ω .

Důsledek. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $p \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Pak f je holomorfní na Ω .

Poznámka. Věta 23 platí i v případě, že místo trojúhelníků uvažujeme obdélníky, jejichž strany jsou rovnoběžné s osami.