ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2022/2023

PŘÍKLADY KE KAPITOLE II

K oddílu II.1 – sublineární funkcionály, pseudonormy, Hahn-Banachova věta

Příklad 1. Nechť X je reálný vektorový prostor.

(1) Nechť $f_1, \dots, f_n$ jsou lineární funkcionály na X. Ukažte, že $\max\{f_1, \dots, f_n\}$ je sublineární funkcionál na X.

(2) Nechť p je sublineární funkcionál na X. Ukažte, že pro každé $x \in X$ platí

$$p(x) = \max\{f(x); f \text{ je lineární funkcionál na } X, f \leq p\}.$$

`Návod:` *(2) Použijte algebraickou Hahn-Banachovu větu, tj. Větu II.2 z přednášky.*

Příklad 2. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$.

(1) Nechť $f_1, \dots, f_n$ jsou lineární funkcionály na X. Ukažte, že $\max\{|f_1|, \dots, |f_n|\}$ je pseudonorma na X.

(2) Nechť p je pseudonorma na X. Ukažte, že pro každé $x \in X$ platí

$$p(x) = \max\{|f(x)|; f \text{ je lineární funkcionál na } X, |f| \leq p\}.$$

`Návod:` *(2) Použijte Důsledek II.5 z přednášky.*

Příklad 3. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X^*$ je omezená množina.

(1) Ukažte, že

$$p_A(x) = \sup\{\operatorname{Re} f(x); f \in A\}, \quad x \in X,$$

je spojitý sublineární funkcionál na X.

(2) Ukažte, že

$$q_A(x) = \sup\{|f(x)|; f \in A\}, \quad x \in X,$$

je spojitá pseudonorma na X.

(3) Nechť 0 je vnitřním bodem množiny A. Ukažte, že q_A je ekvivalentní norma na X.

`Návod:` *(1,2) Spojitost ukažte tak, že ukážete lipschitzovskost.*

Příklad 4. Nechť X je normovaný lineární prostor a U otevřená konvexní množina obsahující 0. Ukažte, že existuje právě jeden sublineární funkcionál p na X, pro který platí $U = \{x \in X; p(x) < 1\}$. Ukažte, že p je spojitý.

`Návod:` *Uvažte Minkowského funkcionál množiny U.*

Příklad 5. Dokažte Větu II.6 z přednášky (tj. Hahn-Banachovu větu o rozšiřování spojitých lineárních funkcionálů) pro reálné separabilní normované prostory bez použití Zornova lemmatu.

`Návod:` *Použijte existenci spočetné husté množiny, Lemma II.3 a Větu I.15.*

Příklad 6. Dokažte Větu II.6 z přednášky pro komplexní separabilní normované prostory bez použití Zornova lemmatu.

`Návod:` *Použijte předchozí příklad na reálnou část funkcionálu a Tvrzení I.47(d) z přednášky.*

Příklad 7. Nechť X je normovaný lineární prostor, Y jeho podprostor a $T : Y \to \ell^\infty(\Gamma)$ spojitý lineární operátor. Ukažte, že existuje lineární operátor $\widetilde{T} : X \to \ell^\infty(\Gamma)$, který rozšiřuje T a pro něž platí $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$.

`Návod:` *Použijte Hahn-Banachovu větu na funkcionály $x \mapsto Tx(\gamma)$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.*

Příklad 8. Nechť X je normovaný lineární prostor, Y jeho podprostor a Z normovaný prostor konečné dimenze. Ukažte, že každý operátor $T \in L(Y, Z)$ lze rozšířit na operátor $\widetilde{T} \in L(X, Z)$.

`Návod:` *Použijte předchozí příklad a ekvivalenci norem na prostorech konečné dimenze.*

Příklad 9. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$ a p je spojitý sublineární funkcionál na X. Nechť f je lineární funkcionál na X splňující $\operatorname{Re} f \leq p$. Ukažte, že f je spojitý.

`Návod:` *Ukažte, že $\operatorname{Re} f$ je omezená na B_X. Odtud odvoďte, že $\operatorname{Re} f$ je spojitý, a tedy i f je spojitý (například s využitím Tvrzení I.47).*

Příklad 10. Ukažte, že na prostoru $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ existuje Banachova limita, tj. spojitý lineární funkcionál L s vlastnostmi:

- $L((x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, pokud limita existuje.
- Pokud $x_n \leq y_n$ pro všechna n, pak $L((x_n)) \leq L((y_n))$.
- $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = L(x_2, x_3, x_4, \dots)$ pro každé $(x_n) \in \ell^\infty$.

`Návod:` *Použijte Větu II.2 z přednášky na funkcionál $(x_n) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ na c (tj. na podprostoru tvořeném konvergentními posloupnostmi) a sublineární funkcionál $p((x_n)) = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.*

Příklad 11. Ukažte, že Banachova limita z předchozího příkladu nemůže splňovat $L((x_n y_n)) = L(x_n)L(y_n)$ pro každou dvojici $(x_n), (y_n) \in \ell^\infty$.

`Návod:` *Ukažte, že nutně $L(1, 0, 1, 0, \dots) = \frac{1}{2}$.*

Příklad 12. Nechť H je Hilbertův prostor a $Y \subset H$ jeho podprostor. Ukažte, že pro každý funkcionál $f \in Y^*$ existuje právě jeden funkcionál $g \in H^*$ stejné normy, který rozšiřuje f.

`Návod:` *Ukažte, že nutně $g = 0$ na $Y^\perp$.*

Příklad 13. Najděte podprostor $Y \subset \ell^1$ a $f \in Y^*$, pro který existují dvě různá rozšíření na ℓ^1, která mají stejnou normu.

Příklad 14. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Ukažte, že $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}} A$. (Zde $A^\perp = \{f \in X^*; f(x) = 0 \text{ pro } x \in A\}$ a analogicky pro $B \subset X^*$ je $B_\perp = \{x \in X; f(x) = 0 \text{ pro } f \in B\}$, viz oddíl III.1.)

`Návod:` *Použijte Důsledek II.10 z přednášky.*

Příklad 15. Nechť X je normovaný lineární prostor. Pro $A \subset X$ a $B \subset X^*$ položme

$$A^{\triangleright} = \{f \in X^*; \operatorname{Re} f(x) \leq 1 \text{ pro } x \in A\},$$
$$B_{\triangleright} = \{x \in X; \operatorname{Re} f(x) \leq 1 \text{ pro } f \in B\}.$$

Ukažte, že pro $A \subset X$ platí $(A^{\triangleright})_{\triangleright} = \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}$.

`Návod:` *Rozmyslete si, že inkluze $\supset$ je snadná. Pro důkaz opačné inkluze použijte Větu II.11(2) pro oddělení bodu od* $\overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}$.

Příklad 16. Nechť X je normovaný lineární prostor. Pro $A \subset X$ a $B \subset X^*$ položme

$$A^{\circ} = \{f \in X^*; |f(x)| \leq 1 \text{ pro } x \in A\},$$
$$B_{\circ} = \{x \in X; |f(x)| \leq 1 \text{ pro } f \in B\}.$$

Ukažte, že pro $A \subset X$ platí $(A^{\circ})_{\circ} = \overline{\operatorname{aco} A}$, kde aco označuje absolutně konvexní obal, tj. nejmenší absolutně konvexní množinu, která obsahuje A.

`Návod:` *Rozmyslete si, že inkluze $\supset$ je snadná. Pro důkaz opačné inkluze použijte Větu II.11(2) pro oddělení bodu od* $\overline{\operatorname{aco} A}$. *Podobnou metodou jako v Důkazu Větičky II.4 ukažte, že lze reálnou část nahradit absolutní hodnotou.*

Příklad 17. Nechť X je normovaný lineární prostor.

(1) Ukažte, že, je-li X^* separabilní, je i X separabilní.
(2) Nechť X je separabilní. Musí být i X^* separabilní?

`Návod:` *(1) Nechť $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ je hustá v X^* a neobsahuje nulu. Pro každé n nechť $x_n \in X$ je takové, že $f_n(x_n) \neq 0$. Pomocí předchozího příkladu ukažte, že $\overline{\operatorname{span}}\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = X$, a z toho odvoďte separabilitu. (2) Použijte konkrétní podobu duálních prostorů z oddílu II.3 z přednášky.*

Příklad 18. Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$ pro nějaké $p \in [1, \infty)$ (uvažujme prostory nad $\mathbb{R}$). Nechť $\boldsymbol{x} = (x_n) \in X$ je prvek, jehož všechny souřadnice jsou kladné, a $\boldsymbol{y} = (\frac{x_n}{n}) \in X$. Položme

$$A = \{\boldsymbol{z} = (z_n) \in X; \forall n \in \mathbb{N} : z_n \geq 0\}, \qquad B = \{-\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}; t \in \mathbb{R}\}.$$

Ukažte, že A a B jsou disjunktní uzavřené konvexní podmnožiny X, které není možné oddělit nenulovým prvkem X^*.

`Návod:` *Postupujte sporem: Nechť $f \in X^* \setminus \{0\}$ splňuje $\sup f(B) \leq \inf f(A)$. Ukažte, že nutně $f \geq 0$ na A a $\inf f(A) = 0$. Funkcionál f lze reprezentovat příslušnou posloupností (prvkem ℓ^1 resp. ℓ^q, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, viz oddíl II.3), ukažte, že všechny prvky této posloupnosti musí být nezáporné. Z předpokladu $\inf f(B) \leq 0$ odvoďte $f(\boldsymbol{y}) = 0$, a odtud $f = 0$, což dává spor.*

K oddílu II.2 – vnoření do druhého duálu a reflexivita

Příklad 19. Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Připomeňme, že X_R je jeho reálná verze a že zobrazení $\phi : (X^*)_R \to (X_R)^*$ definované předpisem $\phi(f)(x) = \operatorname{Re} f(x)$ ($f \in (X^*)_R$, $x \in X_R$) je dle Tvrzení I.47 z přednášky lineární izometrie mezi reálnými Banachovými prostory $(X^*)_R$ a $(X_R)^*$. Pro $F \in (X^{**})_R$ definujme zobrazení $\psi(F) : (X_R)^* \to \mathbb{R}$ předpisem $\psi(F)(g) = \operatorname{Re} F(\phi^{-1}(g))$ pro $g \in (X_R)^*$.

(1) Ukažte, že ψ je lineární izometrie $(X^{**})_R$ na $(X_R)^{**}$.
(2) Ukažte, že $\psi \circ \varkappa_X = \varkappa_{X_R}$ (kde $\varkappa_X$ je kanonické vnoření X do X^{**} uvažované jako zobrazení mezi reálnými prostory X_R a $(X^{**})_R$).
(3) Ukažte, že X je reflexivní, právě když X_R je reflexivní.

Příklad 20. Nechť K je nekonečný kompaktní metrický prostor.

(1) Ukažte, že v K existuje prostá konvergentní posloupnost.
(2) Ukažte, že pro každé $x \in K$ vzorec $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in \mathcal{C}(K)$, definuje spojitý lineární funkcionál normy 1.
(3) Ukažte, že pro $x_1, \dots, x_n \in K$ různé a $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ platí

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{x_j} \right\| = \sum_{j=1}^{n} |c_j| .$$

(4) Nechť (x_n) je posloupnost z bodu (1) s limitou $x \in K$. Uvažme

$$Y = \operatorname{span}\{\delta_x, \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots\} \subset \mathcal{C}(K)^*.$$

Ukažte, že prvky $\delta_x, \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots$ jsou lineárně nezávislé a že funkcionál $\varphi : Y \to \mathbb{F}$, který prvku Y přiřadí jeho koeficient u δ_x, je spojitý na Y (a má normu 1).
(5) Ukažte, že žádné rozšíření φ na $\mathcal{C}(K)^*$ (tj. na prvek $\mathcal{C}(K)^{**}$) nepatří do $\varkappa(\mathcal{C}(K))$ a z toho odvoďte, že $\mathcal{C}(K)$ není reflexivní.

`Návod:` *(3) Pro důkaz nerovnosti $\geq$ využijte Lemma II.22 z přednášky. Nechť d je metrika na K. Najděte $r > 0$, že $B_d(x_j, r)$, $j = 1, \dots, n$ jsou disjunktní, a s využitím bodu (b) lemmatu najděte funkci $f \in \mathcal{C}(K)$ takovou, že $\|f\|_\infty = 1$ a $c_j f(x_j) = |c_j|$ pro $j = 1, \dots, n$. (4) Lineární nezávislost odvoďte z (3), stejně jako normu φ. (5) Nechť rozšíření je tvaru $\varkappa(f)$. Spočtěte hodnoty f v bodech x a x_k, $k \in \mathbb{N}$, a ukažte, že f nemůže být spojitá.*

Příklad 21. Nechť K je nekonečný kompaktní metrický prostor, posloupnost (x_n) a x nechť jsou jako v předchozím příkladu. Ukažte, že funkcionál $\varphi = \delta_x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{x_n}$ má normu 2 a své normy nenabývá. Odtud znovu odvoďte, že $\mathcal{C}(K)$ není reflexivní.

`Návod:` *Pro výpočet normy použijte bod (3) předchozího příkladu. Předpokládejme, že norma se nabývá v nějaké funkci $f \in B_{\mathcal{C}(K)}$. Ukažte, že f nemůže být spojitá v bodě x.*

K oddílu II.3 – reprezentace duálních prostorů

Příklad 22. Ukažte, že c_0^{**} je izometrický ℓ^∞ a že kanonickému vnoření odpovídá identické zobrazení c_0 do ℓ^∞.

`Návod:` *Použijte Větu II.17.*

Příklad 23. Nechť c je prostor konvergentních posloupností z Příkladu I.6. Ukažte, že c^* je izometrický ℓ^1 a příslušnou izometrii popište.

`Návod:` *Uvažte zobrazení $T : \ell^1(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \to c^*$ definované předpisem $T(f)((x_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) x_k + f(\infty) \cdot \lim_{k\to\infty} x_k$.*

Příklad 24. Nechť Γ je nespočetná množina. Pro každou z níže uvedených σ-algeber Σ a měr μ popište prostory $L^1(\Gamma,\Sigma,\mu)$, $L^\infty(\Gamma,\Sigma,\mu)$ a $(L^1(\Gamma,\Sigma,\mu))^*$. V kterých případech je zobrazení $\Phi : L^\infty(\Gamma,\Sigma,\mu) \to (L^1(\Gamma,\Sigma,\mu))^*$ z Věty II.19 z přednášky izometrie a v kterých případech je na?

(1) Σ jsou všechny podmnožiny Γ, μ je počítací míra (tj. pro konečné množiny dává počet prvků, pro nekonečné množiny dává ∞).
(2) $\Sigma = \{A \subset \Gamma; A \text{ je spočetná nebo } \Gamma \setminus A \text{ je spočetná}\}$, μ je zúžení počítací míry na Σ.
(3) Σ je jako v bodě (2), $\mu(A) = 0$ pro spočetnou A a $\mu(A) = \infty$, pokud $\Gamma \setminus A$ je spočetná.
(4) Σ je jako v bodě (2), $\mu(A) = 0$ pro spočetnou A a $\mu(A) = 1$, pokud $\Gamma \setminus A$ je spočetná.
(5) Σ jsou všechny podmnožiny Γ, $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(A) = \infty$ pro $A \neq \emptyset$.

Příklad 25. Nechť (Ω,Σ,μ) je prostor s mírou. Uvažme zobrazení $\Phi : L^\infty(\Gamma,\Sigma,\mu) \to (L^1(\Gamma,\Sigma,\mu))^*$ z Věty II.19.

(1) Ukažte, že Φ je izometrie do, právě když platí podmínka
$$\forall A \in \Sigma, \mu(A) > 0 \exists B \in \Sigma : B \subset A \ \&\ 0 < \mu(B) < \infty.$$
(Takové míře se říká polokonečná.)
(2) Ukažte na protipříkladu, že ani pro případ polokonečné míry nemusí být Φ na.
(3) Předpokládejme, že existuje systém $(\Omega_j)_{j\in J}$ s vlastnostmi
  (a) Množiny Ω_j jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{j\in J} \Omega_j = \Omega$;
  (b) pro každé $j \in J$ platí $\Omega_j \in \Sigma$ a $0 < \mu(\Omega_j) < \infty$;
  (c) pro $A \subset \Omega$ platí $A \in \Sigma \Leftrightarrow \forall j \in J \colon A \cap \Omega_j \in \Sigma$.
Ukažte, že Φ je izometrie na.

`Návod:` *(1) Použijte metodu příslušné části důkazu Věty II.19. (2) Použijte vhodný bod předchozího příkladu. (3) Modifikujte důkaz pro σ-konečný případ.*

Příklad 26. Uvažme zobrazení $\Psi : \mathcal{B}_b([0,1]) \to \mathcal{M}([0,1])^*$ a $\Upsilon : \ell^\infty([0,1]) \to \mathcal{M}([0,1])^*$ daná předpisem
$$\Psi(f)(\mu) = \int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in \mathcal{B}_b([0,1]), \mu \in \mathcal{M}([0,1]);$$
$$\Upsilon(f)(\mu) = \sum_{t\in[0,1]} f(t) \cdot \mu(\{t\}), \quad f \in \ell^\infty([0,1]), \mu \in \mathcal{M}([0,1]).$$

(1) Ukažte, že Ψ je lineární izometrie $\mathcal{B}_b([0,1])$ do $\mathcal{M}([0,1])^*$.
(2) Ukažte, že zúžení Ψ na $\mathcal{C}([0,1])$ odpovídá kanonickému vnoření $\mathcal{C}([0,1])$ do druhého duálu (při identifikaci $\mathcal{C}([0,1])^*$ s $\mathcal{M}([0,1])$ dle Věty II.23).
(3) Ukažte, že Υ je lineární izometrie $\ell^\infty([0,1])$ do $\mathcal{M}([0,1])^*$.
(4) Ukažte, že $\ell^\infty_c([0,1]) \subset \mathcal{B}_b([0,1])$ a že pro $f \in \ell^\infty_c([0,1])$ je $\Psi(f) = \Upsilon(f)$.
(5) Ukažte, že $\Psi(1)$ není v oboru hodnot Υ.
(6) Ukažte, že $\Upsilon(1)$ není v oboru hodnot Ψ.
(7) Ukažte, že $(\Psi(\mathcal{B}_b([0,1])))_\perp = \{0\}$ a popište $(\Upsilon(\ell^\infty([0,1])))_\perp$.

`Návod:` *(5) Uvažte hodnotu na Lebesgueově míře. (6) Předpokládejme, že $\Psi(f) = \Upsilon(1)$. Aplikací na Diracovy míry odvoďte, že nutně $f = 1$. Následně ukažte, že $\Psi(1) \neq \Upsilon(1)$. (7) Pro první rovnost použijte výsledek (2).*

Příklad 27. Nechť (X_n) je posloupnost Banachových prostorů.

(1) Ukažte, že $((\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n)_{c_0})^*$ je izometrický $(\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n^*)_{\ell^1}$ a popište příslušnou izometrii.
(2) Nechť $p \in [1,\infty)$ a $q \in (1,\infty]$ jsou taková, že $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Ukažte, že $((\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n)_{\ell^p})^*$ je izometrický $(\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n^*)_{\ell^q}$ a popište příslušnou izometrii.
(3) Nechť $p \in (1,\infty)$. Ukažte, že prostor $(\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n)_{\ell^p}$ je reflexivní, právě když každý z prostorů X_n je reflexivní.

`Návod:` *Použijte metodu důkazu Věty II.17 a Důsledku II.18 z přednášky.*

Příklad 28.

(1) Nechť $(x_n) \in \ell^1$. Ukažte, že funkcionál na c_0 reprezentovaný posloupností (x_n) (ve smyslu Věty II.17 z přednášky) nabývá své normy, právě když jen konečně mnoho jeho souřadnic je nenulových.
(2) Nechť $(x_n) \in \ell^\infty$. Ukažte, že funkcionál na ℓ^1 reprezentovaný posloupností (x_n) (ve smyslu Věty II.17 z přednášky) nabývá své normy, právě když existuje $m \in \mathbb{N}$, pro které $|x_m| = \|(x_n)\|_\infty$.

Příklad 29. Nechť μ je σ-konečná míra a $f \in L^\infty(\mu)$. Ukažte, že funkcionál na $L^1(\mu)$ reprezentovaný funkcí f (ve smyslu Věty II.19 z přednášky) nabývá své normy, právě když množina $\{x \in \Omega; |f(x)| = \|f\|_\infty\}$ má kladnou míru.

Příklad 30. Nechť K je kompaktní metrický prostor a $\mu \in \mathcal{M}(K,\mathbb{R})$. Ukažte, že funkcionál na $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ reprezentovaný mírou μ (ve smyslu Věty II.23 z přednášky) nabývá své normy, právě když existují disjunktní uzavřené množiny $F_1, F_2 \subset K$ takové, že μ^+ je nesená F_1 a μ^- je nesená F_2 (tj. $\mu^+(K \setminus F_1) = 0$ a $\mu^-(K \setminus F_2) = 0$).

`Návod:` *Pro implikaci $\Leftarrow$ použijte Lemma II.22(b) z přednášky. Pro opačnou implikaci uvažte f, v níž se norma nabývá a ukažte, že lze vzít $F_1 = f^{-1}(1)$ a $F_2 = f^{-1}(-1)$.*

K oddílu II.4 – slabá a slabá* konvergence

Příklad 31. Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X,Y)$. Ukažte, že

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ v } X \Longrightarrow T(x_n) \xrightarrow{w} T(x) \text{ v } Y.$$

`Návod:` *Je-li $f \in Y^*$, pak $f \circ T \in X^*$.*

Příklad 32. Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor a X_R jeho reálná verze. Dokažte, že

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ v } X \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x \text{ v } X_R.$$

`Návod:` *Použijte Tvrzení I.47(d,e).*

Příklad 33. Nechť X je normovaný lineární prostor a $x_n \xrightarrow{w} x$. Ukažte, že existuje posloupnost (y_n), která splňuje

- $y_n \in \operatorname{conv}\{x_k; k \geq n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$;
- $y_n \to x$.

`Návod:` *Z Tvrzení II.26 plyne, že $x \in \overline{\operatorname{conv}\{x_k; k \geq n\}}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

Příklad 34. Nechť X je Hilbertův prostor a (e_n) je ortonormální posloupnost v X. Ukažte, že posloupnost (e_n) konverguje slabě k nule.

`Návod:` *Použijte reprezentaci duálu Hilbertova prostoru (Věta II.15) a Besselovu nerovnost (Věta I.35).*

Příklad 35. Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$, kde $p \in (1, \infty)$. Ukažte, že posloupnost $(\boldsymbol{e}^n)$ kanonických jednotkových vektorů slabě konverguje k nule.

`Návod:` *Použijte reprezentaci duálu z Věty II.17.*

Příklad 36. Nechť $X = \ell^\infty$. Ukažte, že posloupnost $(\boldsymbol{e}^n)$ kanonických jednotkových vektorů slabě konverguje k nule.

`Návod:` *Použijte předchozí příklad a Tvrzení II.24.*

Příklad 37. Nechť $X = c_0$. Ztotožněme $X^* = \ell^1$ podle Věty II.17.

(1) Ukažte, že posloupnost $(\boldsymbol{e}^n)$ kanonických jednotkových vektorů v X^* slabě* konverguje k nule, ale nemá slabou limitu.
(2) Ukažte, že neexistuje posloupnost konvexních kombinací prvků $\boldsymbol{e}^n$, která silně konverguje k nule, a tedy analogie Tvrzení II.26 pro slabou* konvergenci neplatí.

`Návod:` *(1) První tvrzení dokažte s použitím reprezentace z Věty II.17. Dále, dle téže věty lze ztotožnit $X^{**} = \ell^\infty$ a tento prostor obsahuje posloupnost konstantně rovnou jedné. (2) Každá konvexní kombinace kanonických vektorů má normu* 1.

Příklad 38. Nechť $X = C([0, 1])$.

(1) Nechť (f_n) je posloupnost v X a $f \in X$. Ukažte, že
$$f_n \xrightarrow{w} f \Leftrightarrow (f_n) \text{ je omezená a } \forall t \in [0, 1]\colon f_n(t) \to f(t).$$
(2) Najděte posloupnost (f_n) v X, bodově konverguje k nule, ale není omezená. Z toho odvoďte, že v bodě (1) nelze škrtnout podmínku omezenosti.

`Návod:` *(1) Pro implikaci $\Rightarrow$ použijte Důsledek II.30. Pro implikaci $\Leftarrow$ použijte Větu II.23 a Lebesgueovu větu o záměně limity a integrálu.*

Příklad 39. Nechť $X = (c_{00}, \|\cdot\|_p)$, kde $p \in [1, \infty]$.

(1) Ukažte, že X je neúplný normovaný lineární prostor, a popište jeho zúplnění.
(2) Popište reprezentaci X^* jako prostoru posloupností.
(3) Nechť $(\boldsymbol{e}_n)$ je posloupnost kanonických jednotkových vektorů v X^* (reprezentují souřadnicové funkcionály). Ukažte, že pro každou číselnou posloupnost (c_n) platí $c_n \boldsymbol{e}_n \xrightarrow{w^*} 0$ v X^*.
(4) Z předchozího bodu odvoďte, že Důsledek II.30(b) neplatí pro neúplné prostory X.

`Návod:` *(2) Duály k X a k jeho zúplnění splývají (viz Tvrzení I.15).*

Příklad 40. Nechť (a_n) je číselná posloupnost.

(1) Nechť $p \in [1, \infty)$. Přepokládejme, že pro každé $(x_n) \in \ell^p$ řada $\sum_{k=1}^\infty a_k x_k$ konverguje. Ukažte, že $(a_n) \in \ell^q$, kde $q \in (1, \infty]$ splňuje $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(2) Přepokládejme, že pro každé $(x_n) \in c_0$ řada $\sum_{k=1}^\infty a_k x_k$ konverguje. Ukažte, že $(a_n) \in \ell^1$.

`Návod:` *Aplikujte princip stejnoměrné omezenosti na posloupnost (f_n), kde $f_n((x_k)) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$.*

Příklad 41. Nechť H je Hilbertův prostor. Ukažte, že pro posloupnost (x_n) v H a $x \in H$ platí
$$x_n \to x \Longleftrightarrow \|x_n\| \to \|x\| \;\&\; x_n \xrightarrow{w} x.$$

`Návod:` *Pro implikaci $\Leftarrow$ z podmínek na pravé straně odvoďte $\langle x_n - x, x_n - x\rangle \to 0$.*

Příklad 42. Nechť $2 \leq p < \infty$ a $X = L^p(\mu)$ (reálný případ). Ukažte, že pro posloupnost (f_n) v X a $f \in X$ platí

$$f_n \to f \iff \|f_n\| \to \|f\| \ \& \ f_n \xrightarrow{w} f.$$

Návod: *Implikace $\Rightarrow$ je snadná, opačnou implikaci lze dokázat ve dvou krocích. Jako první krok ukažte, že existuje $A > 0$, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí $|1+t|^p \geq 1+pt+A|t|^p$ (pomocí vyšetření průběhu funkce $\frac{|1+t|^p-1-pt}{|t|^p}$ a čitatele tohoto zlomku). Jako druhý krok nerovnost aplikujte pro $t = \frac{f_n(x)-f(x)}{f(x)}$, vynásobte $|f|^p$ a zintegrujte. Použijte předpoklady a odvoďte závěr.*

Příklad 43. Nechť $1 < p < 2$ a $X = L^p(\mu)$ (reálný případ). Ukažte, že pro posloupnost (f_n) v X a $f \in X$ platí

$$f_n \to f \iff \|f_n\| \to \|f\| \ \& \ f_n \xrightarrow{w} f.$$

Návod: *Implikace $\Rightarrow$ je snadná, opačnou implikaci lze dokázat ve třech krocích. Jako první krok ukažte, že existuje $A > 0$, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí $|1+t|^p \geq 1+pt+A\min\{|t|^2, |t|^p\}$ (analogicky jako v předchozím příkladu). Druhý krok je stejný jako v přechozím příkladu, jen vyjde $\int_{[|f_n-f|\geq|f|]} |f_n-f|^p + \int_{[|f_n-f|<|f|]} |f_n-f|^2 |f|^{p-2} \to 0$. Třetí krok spočívá v postřehu, že $\int_{[|f_n-f|<|f|]} |f_n-f|^p \leq \int_{[|f_n-f|<|f|]} |f_n-f| \, |f|^{p-1}$ a následném použití Cauchy-Schwarzovy nerovnosti.*

Příklad 44. Ukažte, že tvrzení z předchozích dvou příkladů platí i v komplexním případě.

Návod: *Nechť $X = L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{C})$. Dle Příkladu 32 stačí tvrzení dokázat pro X_R. Ukažte, že X_R je izomorfní $L^p(\Omega', \Sigma', \mu'; \mathbb{R})$, kde $\Omega' = \Omega \times \{0,1\}$ a Σ' a μ' jsou definovány přirozeným způsobem.*

Příklad 45. Ukažte, že v prostoru ℓ^1 splývá slabá a normová konvergence posloupností (tj. ℓ^1 má **Schurovu vlastnost**).

Návod: *Postupujte sporem: Pokud ne, pak v ℓ^1 existuje posloupnost $(\boldsymbol{x}_k)$, která slabě konverguje k nule a přitom existuje takové $c > 0$, že $\|\boldsymbol{x}_k\| > c$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Protože $(\boldsymbol{x}_k)$ je omezená, bez újmy na obecnosti $\|\boldsymbol{x}_k\| = 1$ pro každé k. Ze slabé konvergence plyne konvergence na každé souřadnici. Pomocí matematické indukce zkonstruujte rostoucí posloupnosti přirozených čísel (k_j) a (m_j), že $\sum_{l=m_j+1}^{m_{j+1}} \left|x_{k_j}(l)\right| > \frac{3}{4}$. Následně najděte $\varphi \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$, aby $\left|\varphi(x_{k_j})\right| > \frac{1}{2}$ pro každé j a z toho odvoďte spor.*

Příklad 46. Ukažte, že prostory c_0, ℓ^p pro $p \in (1, \infty]$ a $\mathcal{C}([0,1])$ nemají Schurovu vlastnost.

Návod: *V každém z těchto prostorů najděte posloupnost na jednotkové sféře, která slabě konverguje k nule. Pro $\mathcal{C}([0,1])$ využijte Příklad 38(1).*

Příklad 47. Ukažte, že nekonečnědimensionální Hilbertův prostor nemá Schurovu vlastnost.

Návod: *Použijte Příklad 34.*

Příklad 48. Ukažte, že prostor $L^1([0,1])$ nemá Schurovu vlastnost.

Návod: *Nechť $T : L^2([0,1]) \to L^1([0,1])$ je identita. Uvažte ON bázi (f_n) prostoru $L^2([0,1])$ známou z teorie Fourierových řad a uvažte posloupnost (Tf_n).*

Příklad 49. Nechť X je reflexivní prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že X nemá Schurovu vlastnost.

Návod: *Kdyby měl, pak z Věty II.34 plyne, že B_X je kompaktní.*