Úvod do funkcionální analýzy
vzorové příklady pro písemky

Zimní semestr 2022/2023

Příklad 1: Rozhodněte, zda níže uvedené vzorce definují spojité lineární funkcionály na daných prostorech. Pokud ano, napište, čím je příslušný funkcionál reprezentován dle standardních vět (tj., kterou posloupností, funkcí či mírou), a spočtěte normu funkcionálu.

(a) $\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{4^n}$, $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$, kde $p \in [1, \infty)$.
(b) Tentýž vzorec jako v (a) na c_0.
(c) $\varphi(f) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-x} \, \mathrm{d}x$, $f \in L^p((0,\infty))$, kde $p \in [1, \infty]$.
(d) $\varphi(f) = f(0) - \int_{-1}^{1} t f(t) \, \mathrm{d}t$, $f \in C([-1,1])$.

Příklad 2: Nechť $X = (C_0(\mathbf{R}), \|\cdot\|)$, kde

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbf{R}} (2 + \sin x)|f(x)|, \quad f \in C_0(\mathbf{R}).$$

(a) Ukažte, že $\|\cdot\|$ je norma na $C_0(\mathbf{R})$ ekvivalentní $\|\cdot\|_\infty$.
(b) Pro $f \in X$ definujme

$$\varphi_1(f) = \int_0^{2\pi} f, \quad \varphi_2(f) = \int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, \mathrm{d}x, \quad \varphi_3(f) = \int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Ukažte, že tyto vzorce definují spojité lineární funkcionály na X, spočtěte jejich normy a rozhodněte, které z nich nabývají své normy.

Příklad 3: Nechť $H = L^2((0, 2\pi), \mu)$, kde míra splňuje $\mathrm{d}\mu = t \, \mathrm{d}t$, tj.

$$\mu(A) = \int_A t \, \mathrm{d}t, \quad A \subset (0, 2\pi) \text{ borelovská.}$$

Uvažme funkce $f(t) = \cos t$ a $g(t) = \sin t$.

(a) Najděte nějakou ortonormální bázi podprostoru $Y = \operatorname{span}\{f, g\}$.
(b) Napište vzorec pro ortogonální projekci na Y.
(c) Najděte bod v Y nejbližší k funkci $h(t) = 1$, $t \in (0, 2\pi)$.

Příklad 4: Nechť $X = C([0,1])$ se standardní normou. Pro $f \in X$ definujme funkci

$$Tf(t) = f(0)t + \int_0^1 f - 3f(t), \quad t \in [0,1].$$

(a) Ukažte, že $T \in L(X)$.
(b) Vyjádřete duální operátor $T' \in L(X^*)$ pomocí standardní reprezentace duálu k $C([0,1])$.
(c) Je operátor T kompaktní?
(d) Spočtěte $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$.
(e) Spočtěte $\sigma(T')$ a $\sigma_p(T')$.

Příklad 5: Nechť $X = L^4((0, \pi))$. Pro $f \in X$ definujme funkci Tf předpisem

$$Tf(t) = f(t) \cos t + \cos^2 t \cdot \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, \mathrm{d}x, \quad t \in (0, \pi).$$

(a) Ukažte, že $T \in L(X)$.
(b) Vyjádřete duální operátor $T' \in L(X^*)$ pomocí standardní reprezentace duálu k $L^4((0,\pi))$.
(c) Je T kompaktní?
(d) Je T izomorfismus?