%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% KLÍČOVÉ POJMY %%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

norma
normovaný lineární prostor
metrika indukovaná normou
Banachův prostor
ekvivalentní normy
uzavřená jednotková koule B_X
otevřená jednotková koule U_X
spojité lineární zobrazení
norma lineárního zobrazení
izometrie
izomorfismus
projekce (spojitá lineární)
skalární součin
prostor se skalárním součinem
norma indukovaná skalárním součinem
Hilbertův prostor
ortogonální doplněk
ortogonální projekce
ortonormální báze
slabě konvergentní posloupnost
slabě* konvergentní posloupnost
duální operátor
kompaktní množina
relativně kompaktní množina
totálně omezená množina
spektrum operátoru
vlastní číslo operátoru
konvoluce dvou funkcí na $\mathbb{R}^d$
Fourierova transformace funkce z $L^1(\mathbb{R}^d)$
Schwartzův prostor

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% DALŠÍ POJMY, JEJICHŽ ZNALOST SE OČEKÁVÁ
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

otevřená koule $U(x, r)$
uzavřená koule $B(x, r)$
jednotková sféra S_X
prostor $L(X, Y)$
duální prostor
izometrické prostory
izomorfní prostory
zúplnění normovaného prostoru
sdruženě lineární zobrazení
konvergentní řada v normovaném lineárním prostoru
součet řady v normovaném lineárním prostoru
absolutně konvergentní řada v normovaném lineárním prostoru
bezpodmínečně konvergentní řada v normovaném lineárním prostoru
přerovnání řady
součet zobecněné řady v normovaném lineárním prostoru
konvergence zobecněné řady v normovaném lineárním prostoru
absolutní konvergence zobecněné řady v normovaném lineárním prostoru
úhel mezi vektory v reálném prostoru se skalárním součinem
kolmé prvky
ortogonální systém

ortonormální systém
maximální ortonormální systém
úplný ortonormální systém
reálná verze komplexního prostoru (tj. prostor X_R)

Prostor $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_p)$ pro $p \in [1,\infty]$
Prostor $\ell^\infty(\Gamma)$
Prostor ℓ^∞
Prostor $\mathcal{C}(K)$
Prostor c_0
Prostor $c_0(\Gamma)$
Prostor c
Prostor $\mathcal{C}^1([0,1])$
Prostor $\ell^p(\Gamma)$ pro $p \in [1,\infty)$
Prostor ℓ^p pro $p \in [1,\infty)$
Prostor $\mathcal{M}(K)$.
Prostor $L^p(\mu)$ pro míru μ a $p \in [1,\infty]$
Prostor $L^p(\Omega)$ pro $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borelovskou a $p \in [1,\infty]$
Skalární součin v prostorech $\mathbb{F}^n$, ℓ^2, $\ell^2(\Gamma)$, $L^2(\mu)$

sublineární funkcionál
pseudonorma
konvexní pohlcující množina
absolutně konvexní množina
Minkowského funkcionál konvexní pohlcující množiny
druhý duál normovaného prostoru
kanonické vnoření normovaného prostoru do druhého duálu
reflexivní prostor
nosič spojité funkce

kvocient vektorového prostoru
kvocient normovaného prostoru a norma na něm
kanonické kvocientové zobrazení
kvocientový operátor
anihilátory $A^\perp$ a $B_\perp$
otevřené zobrazení
součin normovaných prostorů
graf lineárního operátoru
projekce na Y podél Z
algebraický doplněk
topologický doplněk
komplementovaný podprostor
kodimenze
podprostor konečné kodimenze
adjungovaný operátor
kompaktní operátor
konečnědimenzionální operátor
invertibilní operátor
rezolventní množina
rezolventní funkce
vlastní vektor operátoru
bodové spektrum operátoru
samoadjungovaný operátor
numerický obor hodnot

multiindex
řád multiindexu
derivace podle multiindexu, tj. $D^\alpha f$
lokálně integrovatelná funkce

prostor $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$
posun funkce f o y, tj. $\tau_y f$
otočení funkce f, tj. $\check{f}$
aproximativní jednotka (neboli zhlazovací jádro)
polynom na $\mathbb{R}^d$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% VĚTY, JEJICHŽ ZNALOST SE OČEKÁVÁ %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Vysvětlivky:
%  číslo na konci řádku - číslo věty podle přednášky
%  značka před číslem:
%           *   věta se nebude explicitně zkoušet, nicméně
%               se předpokládá její znalost včetně základní
%               myšlenky důkazu, pokud byla dokázána
%           A   věta se nebude explicitně zkoušet, znalost
%               důkazu se nepředpokládá, ale je potřeba znát znění
%               věty, rozumět mu a být schopen(na) větu aplikovat
%               v rozličných situacích
%           +   věta má statut těžké věty a jako taková
%               se bude zkoušet i s důkazem
%  bez značky   věta má statut lehké věty a jako taková se
%               bude zkoušet i s důkazem
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

o metrice indukované normou % * I.1
o vztahu úplnosti a uzavřenosti podprostoru % * I.3
o úplnosti prostoru definovaného pomocí větší normy % I.5
o spojitosti operací v normovaném lineárním prostoru % * I.8
charakterizace ekvivalentních norem % I.9
o ekvivalenci klasických norem na $\mathbb{F}^n$ % * I.10
charakterizace spojitých lineárních zobrazení % I.11
o vlastnostech normy lineárního zobrazení % I.12
o úplnosti prostoru operátorů % I.13
o zachovávání úplnosti izomorfismem % * I.14
o rozšíření operátoru na uzávěr % I.15
o zúplnění normovaného lineárního prostoru % I.16 s důkazem z oddílu II.2
o základních vlastnostech projekcí % I.17
Cauchy-Schwarzova nerovnost % * I.18
o normě indukované skalárním součinem % I.19 včetně I.18
polarizační identita a její důsledky % I.21 a I.22
rovnoběžníkové pravidlo % * I.23
charakterizace prostorů se skalárním součinem % + I.24 (včetně I.23)
o zúplnění prostoru se skalárním součinem % * I.25
o součtu přerovnání bezpodmínečně konvergentní řady % * Poznámka (1) před I.26
o vztahu konvergence a absolutní konvergence v normovaných prostorech % I.26
charakterizace bezpodmínečné konvergence % * I.27
o nutné podmínce konvergence zobecněné řady % I.28
o vlastnostech zobecněných řad v Banachových prostorech % + I.29
o nejbližších bodech v Hilbertových prostorech % + I.31
charakterizace nejbližšího bodu % I.32
Pythagorova věta v prostorech se skalárním součinem % * I.33
o ortogonálním doplňku a ortogonální projekci % I.34 (včetně I.33)
Besselova nerovnost % I.35 (včetně I.33)
o ortonormálních systémech v Hilbertových prostorech % + I.36
o existenci ortonormální báze % * I.37
Riesz-Fisherova věta o reprezentaci Hilbertových prostorů % + I.38 a I.39 (včetně I.37)

o vyjádření ortogonální projekce % I.40
o normách na prostoru konečné dimenze % I.41
o vlastnostech prostorů konečné dimenze % I.42 a I.43
o kompaktnosti jednotkové koule % I.44 a I.45
o funkcionálech a normách na prostoru nekonečné dimenze % * I.46
o reálné verzi komplexního normovaného prostoru % + I.47

%%% z Kapitoly I: 19 lehkých vět, 6 těžkých vět

o Minkowského funkcionálu % II.1
algebraická verze Hahn-Banachovy věty % + II.2 včetně II.3
algebraická Hahn-Banachova věta pro pseudonormu % II.5 včetně II.4
Hahn-Banachova věta o rozšiřování spojitých lineárních funkcionálů % II.6
o duálním vyjádření normy % II.8 včetně II.7
o oddělování pomocí spojitého lineárního funkcionálu % * II.9
o důkazu hustoty pomocí Hahn-Banachovy věty % II.10 (včetně II.9)
Hahn-Banachova věta o oddělování % + II.11
o vnoření normovaného prostoru do druhého duálu % II.12
o vlastnostech reflexivních prostorů % + II.13
o nabývání normy a reflexivitě % * II.14
Riesz-Fisherova věta o duálu Hilbertova prostoru % II.15 a II.16
o reprezentaci duálů k $c_0(\Gamma)$ a $\ell^p(\Gamma)$ % + II.17
o reflexivitě $\ell^p(\Gamma)$ % II.18
o reprezentaci duálů k $L^p(\mu)$ % A II.19
o reflexivitě $L^p(\mu)$ % II.20
Rieszova věta o reprezentaci nezáporných funkcionálů na $\mathcal{C}(K)$ % A II.21
o některých vlastnostech kompaktních prostorů % * II.22
Rieszova věta o reprezentaci duálu k $\mathcal{C}(K)$ % A II.23
o slabé konvergenci v podprostoru % II.24
o zdola polospojitosti normy % A II.25
Mazurova věta % II.26
princip stejnoměrné omezenosti % + II.27 a II.28
o vztahu omezenosti a slabé omezenosti % II.29
o omezenosti slabě a slabě* konvergentních posloupností % * II.30
o limitě posloupnosti operátorů % II.31
o existenci vybrané slabě či slabě* konvergentní posloupnosti % + II.33 a II.34
o nejbližších bodech v reflexivním prostoru % II.35

%%% z Kapitoly II: 14 lehkých vět, 6 těžkých vět

o kvocientu normovaného lineárního prostoru % + III.1
o vlastnostech kanonického kvocientového zobrazení % * III.2
o faktorizaci lineárního operátoru % III.3
o kvocientu Hilbertova prostoru % III.4
o dualitě podprostorů a kvocientů % + III.5
o kvocientu reflexivního prostoru % * III.6
o univerzalitě $\ell^\infty(\Gamma)$ a $\ell^1(\Gamma)$ % * III.7
Banachova věta o otevřeném zobrazení % + III.8 včetně III.9
o spojité bijekci mezi Banachovými prostory % III.10
o součinu normovaných lineárních prostorů % * III.12
o uzavřeném grafu % III.13
o charakerizaci topologického doplňku % III.14
o komplementovaných podprostorech Hilbertova prostoru % * III.15
o komplementovanosti podprostoru konečné dimenze % III.16
o komplementovanosti podprostoru konečné kodimenze % III.17
o jádru lineárního funkcionálu % * III.18
o základních vlastnostech duálních operátorů % III.19
o adjungovaném operátoru % III.20
o základních vlastnostech adjungovaných operátorů % III.21

o vztahu mezi jádrem a oborem hodnot T a T' % III.22 a III.23
o tom, kdy T' je izomorfismus % III.24
charakterizace kompaktních operátorů % III.25
o vlastnostech kompaktních a konečnědimenzionálních operátorů % III.26
Arzelà-Ascoliova věta o kompaktnosti v $\mathcal{C}(K)$ % + III.27
Schauderova věta o duálním operátoru % + III.28
o množině invertibilních prvků % III.29
o vlastnostech spektra % A III.30
o spektru duálního operátoru % * III.31
o lineární nezávislosti vlastních vektorů % III.32
Fredholmova alternativa % + III.34 včetně III.33(c)
o spektru kompaktního operátoru % + III.35 včetně patřičné části III.33
o spektru a numerickém oboru hodnot % III.36
o samoadjungovaných operátorech % + III.37
Hilbert-Schmidtova věta % + III.38

%%% z Kapitoly III: 17 lehkých vět, 9 těžkých vět

o konvoluci funkcí z L^1 a L^p % + IV.1 (důkaz jen bodu a)
konstrukce funkcí z $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ % * IV.2
o zhlazování pomocí konvoluce % IV.3
o aproximativní jednotce % IV.4 včetně IV.2
o spojitosti operátoru posunu % A IV.5
o konvoluci s aproximativní jednotkou % IV.6 (důkaz bodů i,ii)
o hustotě $\mathscr{D}(\Omega)$ v $L^p(\Omega)$ % IV.7
o základních vlastnostech Fourierovy transformace % + IV.8
o Schwartzově prostoru a Fourierově transformaci na něm % A IV.11
o inverzi pro Schwartzův prostor % + IV.14 (včetně důkazu IV.13)
o inverzi pro případ integrovatelné $\hat{f}$ % * IV.15
o konvoluci na Schwartzově prostoru % IV.16
Plancherelova věta % + IV.34

%%%%% z Kapitoly IV: 5 lehkých vět, 4 těžké věty

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% Další otázky %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

#1 Nechť H_1 a H_2 jsou prostory se skalárním součinem a $T \in L(H_1, H_2)$ je izometrie. Ukažte, že pro každé $x, y \in H_1$ platí $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$.

#2 Nechť $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{F}; \exists g \in L^1(\mathbb{R}) \exists h \in L^2(\mathbb{R}) : f = g + h\}$, přičemž ztotožňujeme funkce, které se rovnají skoro všude. Pro $f \in X$ definujme $\|f\| = \inf\{\|g\|_1 + \|h\|_2; g \in L^1(\mathbb{R}), h \in L^2(\mathbb{R}), f = g + h\}$. Ukažte, že $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor.

#3 Nechť X je normovaný lineární prostor a $f, g \in X^* \setminus \{0\}$. Ukažte, že $\ker f$ a $\ker g$ jsou izomorfní normované lineární prostory.

#4 Nechť X je normovaný lineární prostor a $f : X \to \mathbb{F}$ lineární zobrazení. Ukažte, že f je spojité, právě když $\ker f$ je uzavřený podprostor X. Není-li f spojité, ukažte, že $\ker f$ je hustý podprostor X.

#5 Nechť X je komplexní Banachův prostor a X_R značí jeho reálnou verzi. Ukažte, že X je reflexivní, právě když X_R je reflexivní.

#6 Nechť c je Banachův prostor konvergentních posloupností se supremovou normou. Ukažte, že jeho duál lze reprezentovat jako $\ell^1(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$.

#7 Ukažte, že prostor $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ je izometrický podprostoru $X \subset \mathcal{C}([0,1])$, který je definován $X = \{f \in \mathcal{C}([0,1]); f(0) = f(1) = 0\}$. S využitím této izometrie ukažte, že duál k $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ lze reprezentovat jako prostor měr na $\mathbb{R}$.

#8 Nechť $X = (\ell^1, \|\cdot\|)$, kde $\|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_\infty$. Ukažte, že X^* je izometrický prostoru $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$, kde $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\{\frac{1}{|M|+1}\sum_{n\in M}|x_n|; M \subset \mathbb{N}$ konečná$\}$. ($|M|$ značí počet prvků množiny M.)

#9 Nechť $X = (c_0, \|\cdot\|)$, kde $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\{|x_n| + |x_m|; n, m \in \mathbb{N}, n < m\}$. Ukažte, že X^* je izometrický prostoru $(\ell^1, \|\cdot\|)$, kde $\|x\| = \max\{\|x\|_\infty, \|x\|_1 - \|x\|_\infty\}$.

#10 Nechť $X = c_0 \times \ell^1$ je opatřen normou $\|(x,y)\| = \|x\|_\infty + \|y\|_1$, $(x,y) \in X$. Reprezentujte duál k prostoru X a vyjádřete normu na něm.

#11 Nechť $p \in [1,\infty]$ a $g : [0,1] \to \mathbb{F}$ je měřitelná. Předpokládejme, že pro každé $f \in L^p([0,1])$ je $fg \in L^p([0,1])$. Ukažte, že $g \in L^\infty([0,1])$.

#12 Nechť $p \in [1,\infty]$ a $g : [0,1] \to \mathbb{F}$ je měřitelná. Předpokládejme, že pro každé $f \in L^p([0,1])$ je $fg \in L^1([0,1])$. Ukažte, že $g \in L^q([0,1])$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

#13 Dokažte větu o otevřeném zobrazení z věty o uzavřeném grafu s použitím věty o faktorizaci lineárního operátoru.

#14 Nechť H je Hilbertův prostor a $P \in L(H)$ je projekce, tj. operátor splňující $P^2 = P$. Ukažte, že P je ortogonální projekce, právě když $P^* = P$.

#15 Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in L(H_1, H_2)$. Nechť $T^* \in L(H_2, H_1)$ je (hilbertovsky) adjungovaný operátor. Ukažte, že $\overline{R(T)} = (\ker T^*)^\perp$ a $\ker T = (R(T^*))^\perp$. (Symbol $\perp$ značí ortogonální doplněk.)

#16 Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in L(H_1, H_2)$ je izomorfismus H_1 na H_2. Ukažte, že T je izometrie, právě když $T^* = T^{-1}$. (T^* je (hilbertovsky) adjungovaný operátor k T.)

#17 Nechť X je Banachův prostor a $T \in F(X)$. Ukažte, že $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ a že $\sigma(T)$ obsahuje nejvýše $n+1$ prvků, kde $n = \dim R(T)$.

#18 Nechť X je Banachův prostor a (T_n) je posloupnost v $L(X)$, která konverguje k $T \in L(X)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť $\lambda_n \in \sigma(T_n)$. Ukažte, že každý hromadný bod posloupnosti (λ_n) patří do $\sigma(T)$.

#19 Nechť $\mathcal{P} \in L(L^2(\mathbb{R}))$ je Plancherelova transformace (tj. ona izometrie z Plancherelovy věty pro $d = 1$). Ukažte, že $\sigma_p(\mathcal{P}) = \{1, -1, i, -i\}$ a pro každé z vlastních čísel najděte nějaký vlastní vektor.

#20 Nechť X je reflexivní Banachův prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ spojitá konvexní funkce. (i) Předpokládejme, že existuje $c \in \mathbb{R}$, pro které je množina $\{x \in X; f(x) \le c\}$ neprázdná a omezená. Dokažte, že f nabývá minima na X. (ii) Předpokládejme, že $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$. Dokažte, že f nabývá minima na X.

#21 Nechť $p \in (1,\infty)$, $f \in L^p((0,1))$ a (f_n) je omezená posloupnost v $L^p((0,1))$. Ukažte, že $f_n \xrightarrow{w} f$ v $L^p((0,1))$, právě když $f_n \xrightarrow{w} f$ v $L^1((0,1))$.

#22 Nechť $p \in (1,\infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R})$ a (f_n) je posloupnost v $L^p(\mathbb{R})$. Ukažte, že $f_n \xrightarrow{w} f$ v $L^p(\mathbb{R})$, právě když je posloupnost (f_n) omezená v $L^p(\mathbb{R})$ a pro každou dvojici reálných čísel $a < b$ platí $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.