Nechť X je Banachův prostor

(a) X je reflexivní $\Leftrightarrow$ X^* je reflexivní

<u>Důkaz:</u> $\Rightarrow$: Nechť X je reflexivní. Nechť $\Phi \in X^{***}$ je libovolné.

Označme $\varphi := \Phi \circ \varkappa_X$, tj. $\varphi(x) = \Phi(\varkappa_X(x))$, $x \in X$.

Pak $\varphi \in X^*$. Tvrdím, že $\Phi = \varkappa_{X^*}(\varphi)$

$\ulcorner$ $F \in X^{**} \Rightarrow$ ex. $x \in X$, že $F = \varkappa_X(x)$. (protože X je reflexivní)

Pak $\varkappa_{X^*}(\varphi)(F) = F(\varphi) = \varkappa_X(x)(\varphi) = \varphi(x)$
$= \Phi(\varkappa_X(x)) = \Phi(F)$. $\lrcorner$

$\Leftarrow$ Nechť X^* je reflexivní. Ukážeme, že $\varkappa_X(X)$ je husté v X^{**}. Z úplnosti X pak plyne $\varkappa_X(X) = X^{**}$.

Hustotu ukážeme pomocí Důsledku II.9, tj. důkazem implikace $\Phi \in X^{***}$, $\Phi|_{\varkappa_X(X)} = 0 \Rightarrow \Phi = 0$

$\ulcorner$ Nechť $\Phi \in X^{***}$, $\Phi|_{\varkappa_X(X)} = 0$.

Protože X^* je reflexivní, existuje $\varphi \in X^*$, že $\varkappa_{X^*}(\varphi) = \Phi$

Pro každé $x \in X$ platí:

$0 = \Phi(\varkappa_X(x)) = \varkappa_{X^*}(\varphi)(\varkappa_X(x)) = \varkappa_X(x)(\varphi) = \varphi(x)$,

tj. $\varphi = 0$, tedy i $\Phi = \varkappa_{X^*}(\varphi) = \varkappa_{X^*}(0) = 0$ $\lrcorner$

(b) X reflexivní, $Y \subset\subset X$ uzavřený $\Rightarrow$ Y reflexivní

<u>Důkaz:</u> $F \in Y^{**}$ buď libovolné

Definujme $\tilde{F}(\varphi) = F(\varphi|_Y)$, $\varphi \in X^*$

Pak $\tilde{F} \in X^{**}$ (a $\|\tilde{F}\| \le \|F\|$). Protože X je reflexivní, existuje $x \in X$, že $\tilde{F} = \varkappa_X(x)$.

Pak $x \in Y$. [Kdyby ne, z H-B věty plyne, že existuje $\varphi \in X^*$, že $\varphi(x) = 1$ a $\varphi|_Y = 0$. Pak ovšem

$1 = \varphi(x) = \varkappa_X(x)(\varphi) = \hat{F}(\varphi) = F(\varphi|_Y) = F(0) = 0$, spor]

Naopak $F = \varkappa_Y(x)$: Nechť $\varphi \in Y^*$ libovolné. Z H-B věty plyne, že existuje $\tilde{\varphi} \in X^*$, že $\tilde{\varphi}|_Y = \varphi$.

Pak $F(\varphi) = F(\tilde{\varphi}|_Y) = \tilde{F}(\tilde{\varphi}) = \varkappa_X(x)(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$

Opravdu tedy $F = \varkappa_Y(x) \in \varkappa_Y(Y)$. Tedy reflexivita Y.

(c) X reflexivní, Y izomorfní X $\Rightarrow$ Y reflexivní

<u>Důkaz:</u> Nechť $T: X \to Y$ je izomorfismus na.

$y^{**} \in Y^{**} \Rightarrow$ definujme $x^{**}(x^*) = y^{**}(x^* \circ T^{-1})$, $x^* \in X^*$

Pak $x^{**} \in X^{**}$. Protože X je reflexivní, existuje $x \in X$, že $\varkappa_X(x) = x^{**}$. Tvrdím, že pak $y^{**} = \varkappa_Y(Tx)$

[$y^* \in Y^* \Rightarrow$

$\varkappa_Y(Tx)(y^*) = y^*(Tx) = (y^* \circ T)(x) = \varkappa_X(x)(y^* \circ T)$

$= x^{**}(y^* \circ T) = y^{**}(y^*)$.]