II. Spojité lineární funkcionály a dualita

II.1 Hahn-Banachova věta a její aplikace

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $p : X \to \mathbb{R}$ se nazývá **sublineární funkcionál**, pokud má následující vlastnosti:
- $\forall x, y \in X : p(x+y) \leq p(x) + p(y)$,
- $\forall x \in X \forall t \in (0, \infty) : p(tx) = tp(x)$.

Pokud zobrazení p navíc splňuje
- $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{F} : p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$,

pak se nazývá **pseudonorma**.

Poznámka. Je-li p sublineární funkcionál, pak $p(\boldsymbol{o}) = 0$. Sublineární funkcionál může nabývat i záporných hodnot, pseudonorma nabývá pouze nezáporných hodnot. Pseudonorma splňuje všechny vlastnosti normy, až na to, že může nabývat nuly i v některých nenulových vektorech.

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $U \subset X$ je konvexní množina obsahující $\boldsymbol{o}$.
- Řekneme, že U je **pohlcující**, pokud pro každé $x \in X$ existuje $t > 0$, pro které $tx \in U$.
- Je-li U pohlcující, definujeme **Minkowského funkcionál** množiny U vzorcem

$$p_U(x) = \inf\{t > 0 \colon x \in tU\} \quad \left(\; = \inf\{t > 0 \colon \tfrac{1}{t}x \in U\}\right).$$

Lemma 1 (o Minkowského funkcionálu). *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $U \subset X$ je konvexní množina obsahující $\boldsymbol{o}$.*

(a) *Je-li U pohlcující, pak p_U je sublineární funkcionál.*

(b) *Je-li U pohlcující a* **absolutně konvexní** *(tj. navíc platí $x \in U, \lambda \in \mathbb{F}, |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x \in U$), pak p_U je pseudonorma.*

(c) *Je-li X navíc normovaný lineární prostor a $\boldsymbol{o}$ je vnitřním bodem U, je U pohlcující a p_U je lipschitzovský (a tedy spojitý) na X.*

Věta 2 (algebraická verze Hahn-Banachovy věty). *Nechť X je reálný vektorový prostor, $p : X \to \mathbb{R}$ sublineární funkcionál, $Y \subset\subset X$ vektorový podprostor a $f : Y \to \mathbb{R}$ lineární funkcionál. Pokud pro každé $x \in Y$ platí $f(x) \leq p(x)$, pak existuje lineární funkcionál $g : X \to \mathbb{R}$ takový, že*
- *$g(x) = f(x)$ pro každé $x \in Y$,*
- *$g(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Lemma 3 (rozšíření funkcionálu o jednu dimenzi). *Nechť X, Y, p a f jsou jako ve Větě 2. Nechť $x_0 \in X \setminus Y$. Pak existuje takové $\alpha \in \mathbb{R}$, že platí*
$$\forall y \in Y \forall t \in \mathbb{R} : f(y) + t\alpha \leq p(y + tx_0).$$

Větička 4. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $f : X \to \mathbb{F}$ lineární funkcionál a p pseudonorma na X. Pokud pro každé $x \in X$ platí $\operatorname{Re} f(x) \leq p(x)$, pak pro každé $x \in X$ platí $|f(x)| \leq p(x)$.*

Důsledek 5 (algebraická Hahn-Banachova věta pro pseudonormu). *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, p je pseudonorma na X, $Y \subset\subset X$ vektorový podprostor a $f : Y \to \mathbb{F}$ lineární funkcionál. Pokud pro každé $x \in Y$ platí $|f(x)| \leq p(x)$, pak existuje lineární funkcionál $g : X \to \mathbb{F}$ takový, že*
- *$g(x) = f(x)$ pro každé $x \in Y$,*
- *$|g(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Věta 6 (Hahn-Banachova o rozšíření). *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$, Y vektorový podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $g \in X^*$ takové, že $g|_Y = f$ a $\|g\| = \|f\|$.*

Důsledek 7. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $x \in X$. Pak existuje $f \in X^*$ takové, že $\|f\| \leq 1$ a $f(x) = \|x\|$.*

Důsledek 8 (duální vyjádření normy). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak pro každé $x \in X$ platí $\|x\| = \max\{|f(x)|\,; f \in B_{X^*}\}$.*

Věta 9. *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y jeho uzavřený podprostor a $x_0 \in X \setminus Y$. Pak existuje $f \in X^*$ takové, že $\|f\| = 1$, $f|_Y = 0$ a $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$.*

Důsledek 10 (důkaz hustoty pomocí Hahn-Banachovy věty). *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Z \subset\subset Y \subset\subset X$ jsou vektorové podprostory. Pak podprostor Z je hustý v Y, právě když platí*
$$\forall f \in X^* : f|_Z = 0 \Rightarrow f|_Y = 0.$$

Věta 11 (Hahn-Banachova věta o oddělování). *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$ a $A, B \subset X$ jsou dvě disjunktní konvexní množiny.*

(1) *Pokud A má neprázdný vnitřek, pak existuje $f \in X^* \setminus \{0\}$ a $c \in \mathbb{R}$, pro která platí*
$$\forall x \in A\, \forall y \in B\colon \operatorname{Re} f(x) \leq c \leq \operatorname{Re} f(y).$$

(2) *Je-li A kompaktní a B uzavřená, pak existuje $f \in X^*$ a $c, d \in \mathbb{R}$, pro která platí*
$$\forall x \in A\, \forall y \in B\colon \operatorname{Re} f(x) \leq c < d \leq \operatorname{Re} f(y).$$