**Věta 11** $X$ NLP, $A, B \subset X$ konvexní (neprázdné), $A \cap B = \emptyset$

(1) $\operatorname{Int} A \neq \emptyset \Rightarrow \exists f \in X^* \setminus \{0\} \ \exists c \in \mathbb{R}$
$$\forall x \in A \ \forall y \in B : \operatorname{Re} f(x) \leq c \leq \operatorname{Re} f(y)$$

Dk: Stačí dokázat pro reálný prostor $X$

zvolme $x_0 \in \operatorname{Int} A$, $y_0 \in B$

Položme $U := (A - x_0) - (B - y_0)$

Pak platí:
- $U$ je konvexní
- $0 \in \operatorname{Int} U$ (protože $0 \in \operatorname{Int}(A - x_0)$, $0 \in B - y_0$, a tedy $A - x_0 \subset U$)
- $y_0 - x_0 \notin U$

Kdyby $y_0 - x_0 \in U$, pak ex. $x \in A, y \in B$
$$y_0 - x_0 = x - x_0 - (y - y_0)$$
$$\Downarrow$$
$0 = x - y \Rightarrow x = y$, spor s tím, že $A \cap B = \emptyset$ $\lightning$

$$Y = \{t \cdot (y_0 - x_0),\ t \in \mathbb{R}\}$$

Definujme $f_0(t(y_0 - x_0)) = t \Rightarrow f_0$ je lineární

Navíc $p_U(y_0 - x_0) \geq 1$, a tedy $f_0 \leq p_U$ na $Y$

Dk:
$$f_0(t(y_0 - x_0)) = t \begin{cases} \overset{t \leq 0}{\leq} 0 \leq p_U(t(y_0 - x_0)) \\ \overset{t > 0}{\leq} t \cdot p_U(y_0 - x_0) = p_U(t(y_0 - x_0)) \end{cases}$$

$V2 \Rightarrow \exists f : X \to \mathbb{R}$ lineární $f \leq p_U$

Potřebujeme: • $f \neq 0$ $\quad (f(y_0 - x_0) = 1)$

• $f$ spojitý: $0 \in \operatorname{int} U \Rightarrow p_U$ lipschitzovský (Lemma 1(c))

↙ Lipschitzovská konstanta

$$f(x) \le p_U(x) \le C \cdot \|x\|$$

tedy: $-f(x) = f(-x) \le C\|-x\| = C\|x\|$

$$\Rightarrow \|f\| \le C$$

• $f \le 1$ na $U$ (protože $p_U \le 1$ na $U$)

tedy $x \in A$, $y \in B$

$$\Rightarrow f(x - x_0 - (y - y_0)) \le 1$$

$$\| $$

$$f(x) - f(y) + \underbrace{f(y_0 - x_0)}_{=1}$$

$$\Rightarrow \forall x \in A\ \forall y \in B: \ f(x) \le f(y)$$

Stačí vzít $c = \sup f(A)$ ⌟

(2) $A$ kompaktní, $B$ uzavřená $\Rightarrow \exists f \in X^* \ \exists c, d \in \mathbb{R}$
$\forall x \in A\ \forall y \in B: \ \operatorname{Re} f(x) \le c < d \le \operatorname{Re} f(y)$

⌜Dk: Opět stačí pro reálný $X$

$A$ kompaktní, $B$ uzavřená $\Rightarrow \operatorname{dist}(A, B) > 0$

⌜Pokud $\operatorname{dist}(A, B) = 0$, pak existují $x_n \in A$, $y_n \in B$, že $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$, tedy $\|x_n - y_n\| \to 0$

$A$ kompaktní $\Rightarrow$ ex. vybraná posloupnost $(x_{n_k})$ a $x \in A$, že $x_{n_k} \to x$

Pak $\|y_{n_k} - x_{n_k}\| \to 0$, tedy $y_{n_k} \to x$

$$\left(\|y_{n_k} - x\| \le \|y_{n_k} - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| \to 0\right)$$

Pak ale $x \in B$ ($B$ je uzavřená) $\Rightarrow x \in A \cap B$, spor $\lightning$

$r := \operatorname{dist}(A, B)$

$\tilde{A} := A + U(0, r)$. Pak $\tilde{A}$ je konvexní, otevřená a $\tilde{A} \cap B = \emptyset$

Aplikujme (a) na $\tilde{A}$ a $B$

$\Rightarrow \exists f \in X^* \setminus \{0\}$ a $d \in \mathbb{R}$, že

$$\forall x \in \tilde{A}\ \forall y \in B : \operatorname{Re} f(x) \le d \le \operatorname{Re} f(y)$$

Protože $f \neq 0$, BÚNO $\|f\| = 1$ (změní se $d$, ale to nevadí)

To znamená, že $\sup f(\tilde{A}) \le d$

Ale $\sup f(\tilde{A}) = \sup f(A + U(0, r)) =$

$$= \sup\left(f(A) + f(U(0,r))\right) = \sup f(A) + \underbrace{\sup f(U(0,r))}_{= r,\ \text{protože}\ \|f\| = 1}$$

$$= \sup f(A) + r$$

Stačí tedy vzít $c = d - r$. $\square$