I.7 Reálné a komplexní normované lineární prostory

Definice. Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Symbolem X_R označme prostor X uvažovaný jako reálný. Tj. X_R je tatáž množina jako X uvažovaná s operací sčítání jako v X, s násobením reálným číslem jako v X a se stejně definovanou normou.

Tvrzení 47 (reálná verze komplexního normovaného lineárního prostoru). *Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Pak platí:*

(a) *X_R je reálný normovaný lineární prostor.*
(b) *X_R je úplný, právě když X je úplný.*
(c) *Je-li norma na X generovaná skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pak norma na X_R je generovaná skalárním součinem daným vzorcem $\langle x, y \rangle_R = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$ pro $x, y \in X_R$.*
(d) *Je-li $\varphi \in X^*$, pak funkcionál $\psi(x) = \operatorname{Re} \varphi(x)$, $x \in X_R$, patří do $(X_R)^*$ a platí $\|\psi\| = \|\varphi\|$.*
(e) *Je-li $\psi \in (X_R)^*$, pak existuje právě jeden funkcionál $\varphi \in X^*$ takový, že $\psi(x) = \operatorname{Re} \varphi(x)$, pro $x \in X_R$. Je dán vzorcem $\varphi(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$ a splňuje $\|\varphi\| = \|\psi\|$.*
(f) *Prostory $(X_R)^*$ a $(X^*)_R$ jsou izometrické.*

Tvrzení 48 (komplexní struktura na reálném normovaném lineárním prostoru). *Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Pak X je izomorfní Y_R pro nějaký komplexní normovaný lineární prostor Y (tj. na X existuje komplexní struktura), právě když existuje $T \in L(X)$, pro který platí $T^2 = -\operatorname{Id}_X$. Násobení komplexním číslem se pak na X definuje předpisem $(\alpha + \beta i)x = \alpha x + \beta T x$ pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $x \in X$ a norma například vzorcem $\|x\|_Y = \sup\{\left\|e^{it}x\right\|; t \in \mathbb{R}\}$.*

Poznámka. Na některých reálných prostorech komplexní struktura existuje (například na $\mathbb{R}^n$ pro n sudé; na $c_0(\Gamma)$ a $\ell^p(\Gamma)$ pro Γ nekonečnou a libovolné $p \in [1, \infty]$) a na některých neexistuje (například na $\mathbb{R}^n$ pro n liché nebo na **Jamesově prostoru** zkonstruovaném R.C. Jamesem v roce 1950). Může se stát, že na daném prostoru existují dvě vzájemně neizomorfní komplexní struktury (viz poznámka za Tvrzením 49 níže).

Tvrzení 49 (komplexně sdružený prostor). *Nechť $X = (X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ je komplexní normovaný lineární prostor. Pro $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ definujme*

$$\lambda \odot x = \overline{\lambda} \cdot X.$$

Pak $(X, +, \odot, \|\cdot\|)$ je komplexní normovaný lineární prostor. Značíme ho X^{cs} a nazýváme **komplexně sdruženým prostorem k** X. *Platí:*

(a) *X^{cs} je úplný, právě když X je úplný.*
(b) *Je-li norma na X daná skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pak norma na X^{cs} je daná skalárním součinem $\langle x, y \rangle_{cs} = \langle y, x \rangle$, $x, y \in X^{cs}$.*

Poznámka: X a X^{cs} obecně nejsou (lineárně) izomorfní. Příklad popsal J. Bourgain v roce 1986. Nicméně, pokud X je jeden z prostorů $\mathcal{C}(K)$, $\mathcal{C}_b(T)$, $\mathcal{M}(K)$, $c_0(\Gamma)$, $\ell^p(\Gamma)$ nebo $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, pak X a X^{cs} jsou dokonce lineárně izometrické.

Definice.

- Nechť X je reálný vektorový prostor. Jeho **komplexifikací** rozumíme komplexní vektorový prostor $X_C = (X \times X, +, \cdot)$, kde operace jsou definovány vzorci
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X;$$
$$(\alpha + i\beta) \cdot (x_1, x_2) = (\alpha x_1 - \beta x_2, \alpha x_2 + \beta x_1), \quad (x_1, x_2) \in X \times X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Prvek $(x_1, x_2) \in X_C$ obvykle zapisujeme jako $x_1 + ix_2$.
- Nechť X je reálný normovaný lineární prostor a X_C je komplexifikace vektorového prostoru X. Normu $\|\cdot\|$ na X_C nazveme **přípustnou**, pokud platí
$$\|(x, 0)\| = \|x\| \quad \text{pro } x \in X \text{ a}$$
$$\|(x, -y)\| = \|(x, y)\| \quad \text{pro } x, y \in X.$$
Prostor X_C opatřený přípustnou normou nazýváme **nějakou komplexifikací** normovaného lineárního prostoru X.
- **Komplexifikací** normovaného lineárního prostoru X se obvykle myslí prostor X_C opatřený normou
$$\|(x, y)\|_{\min} = \sup\{\|\alpha x + \beta y\| \,;\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \leq 1\}.$$

Tvrzení 50 (komplexifikace). *Nechť X je reálný normovaný lineární prostor.*

(a) *Každé dvě přípustné normy na X_C jsou ekvivalentní.*
(b) *Norma $\|\cdot\|_{\min}$ je přípustná a je nejmenší ze všech přípustných norem.*
(c) *X je úplný, právě když je jeho komplexifikace úplná.*
(d) *Pokud $X = \mathbb{C}(K, \mathbb{R})$, $X = \ell_\infty(\Gamma, \mathbb{R})$ nebo $X = c_0(\Gamma, \mathbb{R})$, pak komplexifikací prostoru X je prostor $\mathbb{C}(K, \mathbb{C})$, $\ell_\infty(\Gamma, \mathbb{C})$ nebo $c_0(\Gamma, \mathbb{C})$.*
(e) *Pokud $X = L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$ nebo $X = \ell^p(\Gamma, \mathbb{R})$, kde $p \in [1, \infty)$, pak kanonické zobrazení $(f, g) \mapsto f + ig$ je izomorfismus prostoru X_C na $L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{C})$ nebo $\ell^p(\Gamma, \mathbb{C})$, nikoli však izometrie.*