IV.2 Aproximace hladkými funkcemi

Definice. Nechť $d \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{F}$ spojitá, pak jejím **nosičem** rozumíme množinu
$$\operatorname{spt} f = \overline{\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d; f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}.$$

(b) Označme
$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^d, \mathbb{F}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{F}); \operatorname{spt} f \text{ je kompaktní}\}.$$

(c) Měřitelnou funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{F}$ nazýváme **lokálně integrovatelnou**, jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ existuje takové $r > 0$, že f je lebesguovsky integrovatelná na $U(\boldsymbol{x}, r)$ (tj. $\int_{U(\boldsymbol{x},r)} |f| < \infty$). Prostor všech lokálně integrovatelných funkcí značíme $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{F})$. (Přesněji jde o prostor tříd ekvivalence, kdy ztotožňujeme funkce, které se rovnají skoro všude.)

Poznámky:

- Místo $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d, \mathbb{F})$ a $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{F})$ často píšeme jen $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ a $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
- Měřitelná funkce f je lokálně integrovatelná, právě když pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \mathbb{R}^d$ je $\int_K |f| < \infty$.
- Prostor $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ obsahuje všechny spojité funkce na $\mathbb{R}^d$, jakož i všechny funkce z $L^p(\mathbb{R}^d)$ pro $p \in [1, \infty]$.

Příklady 2 (příklady $\mathcal{C}^\infty$ funkcí).

(1) *Definujme funkci $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem*
$$h_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ e^{-1/t}, & t > 0. \end{cases}$$
Pak $h_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, h_1 je nulová na $(-\infty, 0]$ a kladná na $(0, \infty)$.

(2) *Definujme funkci $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $h_2(t) = h_1(1 - 4t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Pak $h_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, h_2 je kladná na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a nulová v ostatních bodech $\mathbb{R}$. Speciálně platí, že $h_2 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.*

(3) *Definujme funkci $h_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $h_3(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{-1+2t} h_2$, kde $c = \int_{-\infty}^{\infty} h_2$. Pak $h_3 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, h_3 je nulová na $(-\infty, \frac{1}{4}]$, konstantně rovna jedné na $[\frac{3}{4}, \infty)$ a rostoucí na $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.*

(4) *Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ a $0 < r < s$. Definujme funkci $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem*
$$\varphi(\boldsymbol{x}) = h_3\left(\frac{s^2 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2}{s^2 - r^2}\right), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$
Pak $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{spt} \varphi \subset U(\boldsymbol{a}, s)$, φ nabývá pouze hodnot z intervalu $[0, 1]$ a φ je konstantně rovno jedné na $U(\boldsymbol{a}, r)$.

Značení:

- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Prvky $\mathbb{N}_0^d$ nazýváme **multiindexy**. Pro $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ značíme $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$. Toto číslo nazýváme **řádem multiindexu** α.
- Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega, \mathbb{F})$ a $a \in \Omega$, pak
$$D^\alpha f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}(a).$$

Větička 3. *Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Pak $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha(f * \varphi) = f * D^\alpha \varphi$ pro každý multiindex α.*

Větička 4. *Existuje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ s vlastnostmi:*

(a) $\operatorname{spt} \varphi \subset B(0, 1)$, *speciálně* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$;

(b) $\varphi \geq 0$ *na* $\mathbb{R}^d$;

(c) $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, \mathrm{d}\lambda^d = 1$.

Definice. Nechť φ je funkce s vlastnostmi z Větičky 4. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\varphi_n(\boldsymbol{x}) = n^d \varphi(n\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Pak posloupnost (φ_n) se nazývá **aproximativní jednotka** v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ nebo **zhlazovací jádro** v $\mathbb{R}^d$.

Lemma 5. *Nechť $p \in [1, \infty)$ a $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Pak*

$$\lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{o}} \|\tau_{\boldsymbol{y}} f - f\|_p = 0.$$

Věta 6. *Nechť (φ_n) je zhlazovací jádro v $\mathbb{R}^d$. Pak platí:*

(i) $\operatorname{spt} \varphi_n \subset B(0, \frac{1}{n})$, $\varphi_n \geq 0$ *na* $\mathbb{R}^d$ *a* $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda^d = 1$.

(ii) Je-li $p \in [1, \infty)$ a $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $\varphi_n * f \to f$ v $L^p(\mathbb{R}^d)$.

(iii) Je-li $f \in C(\mathbb{R})$, pak $\varphi_n * f \rightrightarrows^{loc} f$ na $\mathbb{R}^d$. Je-li f stejnoměrně spojitá, je konvergence stejnoměrná.

Důsledek 7. *Prostor $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustý v $L^p(\mathbb{R}^d)$ pro každé $p \in [1, \infty)$.*

Poznámka: Nechť $c > 0$ a $\mu = c \cdot \lambda^d$ (kde λ^d je d-rozměrná Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$). Pak pro měřitelnou funkci f na $\mathbb{R}^d$ platí

$$\|f\|_{L^1(\mu)} = c \cdot \|f\|_1, \quad \|f\|_{L^p(\mu)} = c^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_p \text{ pro } p \in [1, \infty), \quad \|f\|_{L^\infty(\mu)} = \|f\|_\infty.$$

Pokud $*_\mu$ budeme značit konvoluci vůči míře μ (tj. ve vzorci je integrál podle μ), pak $f *_\mu g = c \cdot f * g$.

Proto Věta 1, Větičky 3 a 4, Lemma 5, Věta 6 i Důsledek 7 platí, i když všude místo λ^d uvažujeme míru μ.