## III.7 Spektrální teorie kompaktních operátorů

**Úmluva:** V tomto oddíle jsou všechny Banachovy prostory komplexní.

**Větička 33.** *Nechť $X$ je Banachův prostor a $T \in K(X)$. Pak platí:*

(a) *Pokud je $X$ nekonečnědimenzionální, pak $0 \in \sigma(T)$.*

(b) *Pokud $R(T)$ je uzavřený, pak $\dim R(T) < \infty$, tj. $T \in F(X)$.*

(c) *Pokud $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak $\dim \ker(\lambda \operatorname{Id}_X - T) < \infty$ a $R(\lambda \operatorname{Id}_X - T)$ je uzavřený.*

**Věta 34** (Fredholmova alternativa). *Nechť $X$ je Banachův prostor, $T \in K(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda \operatorname{Id}_X - T$ je prostý, právě když je na.*

**Věta 35** (o spektru kompaktního operátoru). *Nechť $X$ je Banachův prostor a $T \in K(X)$. Pak platí:*

(a) *$\sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\}$ (pokud $X$ je nekonečné dimenze, platí rovnost).*

(b) *Pro každé $r > 0$ je množina $\{\lambda \in \sigma(T); |\lambda| > r\}$ konečná.*

**Definice.** Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$.

- Říkáme, že $T$ je **samoadjungovaný** (nebo též **hermiteovský**), pokud $T = T^*$.
- **Numerický obor hodnot** operátoru $T$ definujeme vzorcem

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle \,; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

**Tvrzení 36** (o spektru a numerickém oboru hodnot). *Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Pak $\sigma_p(T) \subset W(T)$ a $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.*

**Tvrzení 37** (o samoadjungovaných operátorech). *Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je samoadjungovaný. Pak platí:*

(i) *$W(T) \subset \mathbb{R}$.*

(ii) *$\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

(iii) *Nechť $x_1, x_2 \in H$ jsou vlastní vektory $T$ příslušné různým vlastním číslům. Pak $x_1 \perp x_2$.*

(iv) *$\operatorname{Ker} T = (R(T))^\perp$.*

(v) *Nechť $m_T = \inf W(T)$ a $M_T = \sup W(T)$. Pak $\|T\| = \max\{M_T, -m_T\}$ a $M_T, m_T \in \sigma(T)$.*

**Věta 38** (Hilbert-Schmidtova věta o spektrálním rozkladu kompaktního samoadjungovaného operátoru). *Nechť $H$ je netriviální Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je nenulový kompaktní samoadjungovaný operátor. Pak existuje ortonormální báze $H$ tvořená vlastními vektory operátoru $T$. Navíc $T$ lze vyjádřit vzorcem*

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n, \quad x \in H,$$

*kde*

*(i)* $N \in \mathbb{N}$ *nebo* $N = \infty$*;*

*(ii)* $(x_n)_{n=1}^N$ *je ortonormální systém v* $H$*;*

*(iii)* $\lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *pro každé* $n$*.*

*Pak každé $\lambda_n$ je vlastní číslo $T$ a $x_n$ je k němu příslušný vlastní vektor; každé nenulové vlastní číslo se ve vyjádření opakuje tolikrát, kolik je jeho násobnost (tj. $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$), $(x_n)_{n=1}^N$ je ortonormální báze $\overline{R(T)}$.*

**Konstrukce Schmidtovy reprezentace kompaktních operátorů:**

Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in K(H) \setminus \{0\}$.

(1) Operátor $T^*T$ je kompaktní a samoadjungovaný, $T^*T \neq 0$. Nechť

$$T^*Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n, \quad x \in H$$

je vyjádření $T^*T$ z Věty 38.

(2) Protože $W(T^*T) \subset [0, +\infty)$, jsou čísla $\lambda_n$ nezáporná.

(3) Definujme operátor $S$ vzorcem

$$Sx = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n} \langle x, x_n \rangle x_n, \quad x \in H.$$

Pak $S$ je samoadjungovaný, kompaktní a $S^2 = T^*T$.

(4) Vektory $y_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} T x_n$ tvoří ortonormální systém.

(5) Platí

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n} \langle x, x_n \rangle y_n, \quad x \in H.$$

Tento vzorec se nazývá **Schmidtova reprezentace operátoru** $T$.