Věta 38 H Hilbert, $T \in K(H) \setminus \{0\}$, $T^* = T$

- T37(c) $\Rightarrow \sigma(T) \subset \mathbb{R}$
- V35(a) $\Rightarrow \forall \lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$: λ je vlast. číslo
- V35(b) $\Rightarrow \sigma(T) \setminus \{0\}$ je buď konečná
  nebo spočetná, tvořena posloupností $\lambda_n \to 0$

Nechť $(\mu_k)_{k=1}^{M}$ jsou všechna nenulová vlast. čísla
$(M \in \mathbb{N}$ nebo $M = \infty)$

(z T37(v) plyne, že $\sigma(T)$ obsahuje buď $\|T\|$ nebo $-\|T\|$,
tedy existuje nenulové vlast. číslo)

$H_k := \operatorname{Ker}(\mu_k I - T)$

Pak z V33(e) plyne, že $\dim H_k < \infty$

z T37(iii) plyne $H_k \perp H_\ell$ pro $k \neq \ell$

Definujme $H_0 := \left(\bigcup_{k=1}^{M} H_k\right)^{\perp}$

Pak $T H_0 \subset H_0$:

$x \in H_0$, $y \in H_k$ pro nějaké $k \geq 1$

$\Rightarrow \langle Tx, y\rangle \underset{T^*=T}{=} \langle x, Ty\rangle = \langle x, \mu_k y\rangle =$

$\underset{(\mu_k \in \mathbb{R})}{=} \mu_k \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow Tx \perp H_k$

Tedy $Tx \in H_0$

$S := T|H_0$. Pak $S \in K(H_0)$, $S^* = S$

a S nemá nenulové vlastní číslo.

Tedy $\sigma(S) \subseteq \{0\} \Rightarrow \|S\| = 0$ (T 37 (v))

neboli $T|H_0 = 0$, $H_0 \subset \ker T$.

Dokaž $H_0 = \ker T$, protože $\ker T \overset{T37(iv)}{=} (R(T))^{\perp} \subset \left(\bigcup_{k=1}^{M} H_k\right)^{\perp} = H_0$

Nechť $x_1^k, \dots, x_{m_k}^k$ je ON báze H_k

Uvažme:

$(\lambda_n)_{n=1}^{N} = \underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{m_1\text{-krát}}, \underbrace{\mu_2, \dots, \mu_2}_{m_2\text{-krát}}, \dots$

$(x_n)_{n=1}^{N} = x_1^1, \dots, x_{m_1}^1, x_1^2, \dots, x_{m_2}^2, \dots$

Pak (x_n) je ON systém, je to ON báze $\overline{R(T)}$ $\left(= (\ker T)^{\perp}\right)$

přidáním libovolné ON báze $H_0 = \ker T$, dostaneme ON bázi H

tvořenou vlastními vektory.

Navíc $Tx = T(\underbrace{P_{H_0}x}_{\in H_0 = \ker T} + P_{H_0^\perp}x) = T(P_{H_0^\perp}x)$

$H_0^\perp = \overline{R(T)} = \overline{\operatorname{span}} \bigcup_{k=1}^{M} H_k$, $(x_n)_{n=1}^{N}$ je ON báze $H_0^\perp$

Tedy $P_{H_0^\perp}x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n \rangle x_n$

$Tx = T(P_{H_0^\perp}x) = \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n \rangle T x_n = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n$