Věta 27 (Arzelà–Ascoli)

K kompaktní, $A \subset C(K)$. Pak

A je relativně kompaktní $\iff$ A je omezená a stejně spojitá.

<u>Důkaz:</u> $\Rightarrow$: A buď relativně kompaktní.

Pak A je totálně omezená, a tedy omezená.

Dokažme, že A je stejně spojitá:

$x \in K$, $\varepsilon > 0$ libovolné

A totálně omezená $\Rightarrow \exists\, f_1, \dots, f_n \in A : \bigcup_{j=1}^{n} U(f_j, \frac{\varepsilon}{3}) \supset A$

$f_1, \dots, f_n$ jsou spojité speciálně v bodě x,

proto existuje U okolí x, že $\forall j \in \{1,\dots,n\}\ \forall y \in U$: $|f_j(y) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Nyní nechť $f \in A$, $y \in U$ jsou libovolné.

Najdeme $j \in \{1, \dots, n\}$: $\|f_j - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\text{Pak } |f(y) - f(x)| \le \underbrace{|f(y) - f_j(y)|}_{\le \|f - f_j\| < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_j(y) - f_j(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3},\ \text{protože } y \in U} + \underbrace{|f_j(x) - f(x)|}_{\le \|f_j - f\| < \frac{\varepsilon}{3}}$$

$\Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$. A to je ono, stejná spojitost dokázána

$\Leftarrow$: Předpokládejme, že A je omezená a stejně spojitá.

Dokážeme, že A je totálně omezená.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné.

A stejně spojitá $\Rightarrow \forall x \in K\ \exists U_x$, okolí x v K, že $\forall f \in A\ \forall y \in U_x : |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Pak U_x, $x \in K$ je otevřené pokrytí K. Protože K je kompaktní, existuje konečné podpokrytí, tj. existují $x_1, \dots, x_n \in K$, že $\bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j} = K$

Definujme operátor $T: C(K) \to (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$ předpisem $Tf = (f(x_1), \dots, f(x_n))$, $f \in C(K)$.
Zřejmě T je lineární a $\|T\| \leq 1$.
Tedy $T(A)$ je omezená podmnožina $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$.
Protože $\dim \mathbb{F}^n < \infty$, je $T(A)$ dokonce totálně omezená.

Tedy existují $f_1, \dots, f_k \in A$, že $\bigcup_{i=1}^{k} U(Tf_i, \frac{\varepsilon}{3}) \supset TA$

Tvrdíme, že $\bigcup_{i=1}^{k} U(f_i, \varepsilon) \supset A$.

$f \in A$ libovolná $\Rightarrow$ ex. $i \in \{1, \dots, k\} : \|Tf - Tf_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$

Tvrdím, že pak $\|f - f_i\| < \varepsilon$

Γ $x \in K \Rightarrow$ existuje $j \in \{1, \dots, n\} : x \in U_{x_j}$.

Pak $|f(x) - f_i(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_j)|}_{< \frac{\varepsilon}{3},\ \text{protože } x \in U_{x_j},\ f \in A} + \underbrace{|f(x_j) - f_i(x_j)|}_{\leq \|Tf - Tf_i\| < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_i(x_j) - f_i(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3},\ \text{protože } x \in U_{x_j},\ f_i \in A} < \varepsilon$

Tedy $\forall x \in K : |f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$. Proto $\|f - f_i\| < \varepsilon$
($|f - f_i|$ nabývá maxima na K.) $\lrcorner$

Tím je dokázána totální omezenost A.

Věta 28 (Schauderova o duálním operátoru)

X, Y Banachovy prostory, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

Pak T je kompaktní $\iff$ T' je kompaktní

Důkaz $\Rightarrow$: Nechť T je kompaktní. Pak $K := \overline{T(B_X)}$ je kompaktní podmnožina Y.

Připomeňme, že $T' : Y^* \to X^*$ je definováno vzorcem $T'y^* = y^* \circ T$, $y^* \in Y^*$

Ukážeme, že T' je kompaktní, tj. $T'(B_{Y^*})$ je relativně kompaktní v X^*

Pro $y^* \in Y^*$ označme $Ry^* = y^* \restriction K$. Pak:

- $Ry^* \in C(K)$

  $\ulcorner y^* \in Y^* \Rightarrow y^* : Y \to \mathbb{F}$ spojitý, $K \subset Y$

  $\Rightarrow y^* \restriction K$ je spojitá funkce $K \to \mathbb{F}$ $\lrcorner$

- R je lineární zobrazení $Y^* \to C(K)$

  $\ulcorner$ to je jasné $\lrcorner$

- $\forall y^* \in Y^*: \|Ry^*\| = \|T'y^*\|$

$$\ulcorner \|T'y^*\| \underset{T'y^* \in X^*}{=} \sup_{x \in B_X} |T'y^*(x)| = \sup_{x \in B_X} |y^*(Tx)| = \sup_{y \in T(B_X)} |y^*(y)| =$$

$$\underset{\substack{T(B_X) \text{ je hustá podmnožina } K \\ y^* \text{ je spojité}}}{=} \sup_{y \in K} |y^*(y)| = \|y^* \restriction K\|_\infty = \|R(y^*)\| \lrcorner$$

Můžeme tedy definovat zobrazení $L : R(T') \to C(K)$ tak, že

$L(T'y^*) = R(y^*)$

$\ulcorner$ přesněji $L(x^*) = R(y^*)$, pokud $x^* \in R(T')$ a $x^* = T'y^*$ $\lrcorner$

- L jednoznačně definované:

$$\ulcorner T'y_1^* = T'y_2^* \underset{\text{definice } T'}{\Rightarrow} y_1^* \circ T = y_2^* \circ T \Rightarrow y_1^* \restriction T(X) = y_2^* \restriction T(X)$$

$$\underset{T(B_X) \subset T(X)}{\Rightarrow} y_1^* \restriction T(B_X) = y_2^* \restriction T(B_X) \underset{\substack{T(B_X) \text{ je hustá podmnožina } K \\ y_1^*, y_2^* \text{ spojité}}}{\Rightarrow} y_1^* \restriction K = y_2^* \restriction K \Rightarrow R(y_1^*) = R(y_2^*) \lrcorner$$

- L je lineární

$\ulcorner$ $x_1^*, x_2^* \in R(T')$ .... zvolme $y_1^*, y_2^* \in X^*$, aby $x_1^* = T'y_1^*$, $x_2^* = T'y_2^*$

Pak $L(x_1^* + x_2^*) = R(y_1^* + y_2^*) = R(y_1^*) + R(y_2^*) = L(x_1^*) + L(x_2^*)$

$x_1^* + x_2^* = T'(y_1^* + y_2^*)$

$\lambda \in \mathbb{F} \Rightarrow L(\lambda x_1^*) = R(\lambda y_1^*) = \lambda R(y_1^*) = \lambda L(x_1^*)$

$\lambda x_1^* = T'(\lambda y_1^*)$ $\lrcorner$

- L je izometrie

$\ulcorner$ $x^* \in R(T')$ ... zvolme $y^* \in X^*$, aby $x^* = T'y^*$

Pak $\|x^*\| = \|T'y^*\| = \|R(y^*)\| = \|L(x^*)\|$ $\lrcorner$

dokázáno výše

Tedy: Chceme dokázat, že $T'(B_{Y^*})$ je relativně kompaktní. To je totéž, jako totální omezenost.

Protože $T'(B_{Y^*}) \subset R(T')$ a $L: R(T') \to C(K)$ je izometrie, platí $T'(B_{Y^*})$ je totálně omezená $\Longleftrightarrow$ $L(T'(B_{Y^*}))$ je totálně omezená.

Stačí tedy dokázat, že $L(T'(B_{Y^*}))$ je totálně omezená.

Protože $L \circ T' = R$ (z konstrukce L), je $L(T'(B_{Y^*})) = R(B_{Y^*})$

Dokážeme tedy, že $R(B_{Y^*}) = \{y^*|_K,\ y^* \in B_{Y^*}\}$ je totálně omezená v $C(K)$.

K tomu použijeme Větu 27:

- $R(B_{Y^*})$ je omezená (protože R je omezený operátor, $\|R\| \le \|T\|$, viz výše)

- $R(B_{Y^*})$ je stejně spojitá:

$y^* \in B_{Y^*}$, $y_1, y_2 \in K \Rightarrow |R(y^*)(y_1) - R(y^*)(y_2)| = |y^*(y_1) - y^*(y_2)| \le$

$R(y^*) = y^*|_K$

$\le \|y^*\| \, \|y_1 - y_2\| \le \|y_1 - y_2\|$

$y^* \in B_{Y^*}$

Tedy $R(y^*)$ je 1-lipschitzovské

z toho plyne stejná spojitost: $\varepsilon > 0$, $y_0 \in K$ ...... $U = U(y_0, \varepsilon)$ ..... $y^* \in B_{Y^*}$, $y \in U$

$\Rightarrow |R(y^*)(y) - R(y^*)(y_0)| \le \|y - y_0\| < \varepsilon$

Tedy z V27 plyne, že $R(B_{Y^*})$ je rel. komp., tedy totálně omezená a tedy $T'(B_{Y^*})$ je též totálně omezená a důkaz je hotov.

$\Leftarrow$: Nechť T' je kompaktní. Dle již dokázané implikace víme, že T'' je relativně kompaktní.
Z Věty 19 (d) víme, že $T'' \circ \varkappa_X = \varkappa_Y \circ T$.
Z Věty 26 (d) plyne, že $T'' \circ \varkappa_X$ je kompaktní, tedy i $\varkappa_Y \circ T$ je kompaktní.

$\Rightarrow \varkappa_Y(T(B_X))$ je rel. kompaktní v Y^{**}, je tedy totálně omezená.
Ale $\varkappa_Y$ je izometrické vnoření Y do Y^{**}, tedy množiny $\varkappa(T(B_X))$ a $T(B_X)$ jsou izometrické. Proto je $T(B_X)$ také totálně omezená.
Protože Y je úplný, je $T(B_X)$ relativně kompaktní.
Tedy T je kompaktní.